СБОРНИК ЗАДАНИЙ

VIII ОБЛАСТНОЙ ОТКРЫТОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ

«УНИКУМ»

ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 3-6 КЛАССОВ

Учебное пособие

Липецк
2017

ГОБОУ «Центр поддержки одаренных детей «Стратегия»

СБОРНИК ЗАДАНИЙ

VIII ОБЛАСТНОЙ ОТКРЫТОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ «УНИКУМ»

ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 3-6 КЛАССОВ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Составители: Г.А. Воробьев, И.А. Шуйкова, П.Н. Азаров, М.В. Подаев

Липецк – 2017

ББК 22.1
УДК 37
С23

Сборник заданий VIII областной открытой олимпиады по математике «УНИКУМ» для учащихся 3-6 классов: Учебное пособие / Сост.: Г.А. Воробьев, И.А. Шуйкова, П.Н. Азаров, М.В. Подаев. – Липецк: ГОБОУ «Центр поддержки одаренных детей «Стратегия», 2017. – 30 с.

Пособие предназначено для учащихся 3-6 классов общеобразовательных учреждений Липецкой области, желающих расширить свои знания и умения в математике, как школьной, так и олимпиадной. В состав сборника вошли задания, указания к их решению и ответы VIII областной открытой олимпиады по математике «Уникум».

Предисловие

Областная открытая олимпиада по математике «Уникум» для школьников 3-6 классов проводится ежегодно, начиная с 2010 года. Организаторами являются управление образования и науки Липецкой области, ГОБОУ «Центр поддержки одаренных детей «Стратегия», ФГБОУ ВО «ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского, ФГБОУ ВО «ЛГТУ», ФГБОУ ВО «ЕГУ имени И. А. Бунина». Систематическая работа преподавателей ГОБОУ «Центр поддержки одаренных детей «Стратегия» и ФГБОУ ВО «ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского» с такими ребятами складывается из нескольких составляющих: проведение занятий по дополнительным общеразвивающим программам; организация и проведение командного турнира по математике «Математические бои»; проведение областной открытой олимпиады по математике «Уникум» для школьников 3-6 классов»; организация профильных смен ГОБОУ «Центр поддержки одаренных детей «Стратегия»; проведение занятий в детском технопарке «Кванториум»; заочная информационно-математическая академия Липецка ZimaLip.ru для школьников 4-6 классов.

Областная открытая олимпиада по математике «Уникум» предоставляет прекрасную возможность для школьников 3-6 классов соотнести свои знания со знаниями сверстников, развить свои способности, почувствовать атмосферу конкурса, получить призы, а также интересно и с пользой провести время.

В рамках областной открытой олимпиады по математике «Уникум» традиционно проходит семинар для учителей математики, на котором преподаватели университета проводят разбор решения нестандартных задач для обучающихся младшего и среднего школьного возраста.

Олимпиада проводится по классическим правилам – школьники получают в аудитории тексты задач и в течение часа решают их, оформляя подробное решение на специальных бланках. Текст олимпиады, рассматриваемый в сборнике, состоит из десяти заданий различного уровня сложности, который, как правило, увеличивается от первых к последним задачам. Некоторые задачи, посильные разным возрастным группам школьников, повторяются в разных вариантах. Первые задачи не представляют особой трудности для большинства обучающихся, что создает мотивацию к решению последующих задач. Наличие относительно несложных одной – двух первых задач особо необходимо тем школьникам, которым пока не по силам более серьезные задачи.

В данном пособии приведены не только условия, но и краткие указания к решению всех задач. Пособие в первую очередь рассчитано на тех учащихся, для которых важно научиться искать решение самостоятельно. Не всегда у школьников есть возможность в течение учебного года ознакомиться с подходами к решению олимпиадных задач, идеями и методами их решения. Приведенные в сборнике решения задач помогут учащимся приобрести новые знания, идеи и расширить свой математический инструментарий. Если ребенок только начал осваивать методы решения нестандартных задач, то ему уместно будет сначала предложить читать и разбирать предложенные задачи совместно с Вами – родителями и учителем, а после этого попробовать решать новые задачи самостоятельно. Наиболее способным и хорошо решающим ребятам лучше, наоборот, сначала решить задачи самостоятельно, а затем обсудить решение с учителем.

Задачи пособия различны по тематике и могут быть использованы учителями на занятиях математических факультативов и спецкурсов. Одним ребятам решение предложенных задач позволит подняться на новый уровень математического мышления, другим – предоставит возможность заняться любимым делом. В любом случае, каждого из школьников ожидает свой собственный процесс развития и мы, ребята, желаем Вам успехов в этом занимательном путешествии!

До встречи на областной открытой олимпиаде
по математике «Уникум»!

Задания VIII областной открытой олимпиады по математике «Уникум», 23 мая 2017
3 класс

Длительность – 70 минут. Количество заданий – 10.

Решение задач должно содержать необходимые пояснения. Все варианты ответов, если их несколько, должны быть указаны. Если ответ один, то должны быть объяснения, почему нет других вариантов ответов. Желаем успеха!

1. Выполните действия:

424 + 18 + 455 + 76 + 45 + 982 + 17.

Укажите самый простой порядок выполнения действий.

Ответ: (424 + 76) + (18 + 982) + (455 + 45) + 17 = 2017 (порядок действий может быть и другой).

2. Обучающиеся агроботанической смены Центра “Стратегия” решили посадить на опытном участке три грядки клубники. На первой грядке они высадили 15 кустов клубники, а на каждой следующей грядке было на 5 кустов больше, чем на предшествующей. Сколько всего кустов клубники было посажено на трёх грядках?

Решение. 1. 15 + 5 = 20 кустов – на второй грядке.

2. 20 + 5 = 25 кустов – на третьей грядке.

3. 15 + 20 + 25 = 60 кустов – всего.

Ответ: 60 кустов.

3. Когда в Калининграде 8 часов, в Липецке – 9 часов. Когда в Липецке 10 часов, в Якутске – 16. Какое время в Калининграде, когда в Якутске 12 часов?

Решение. 9 – 8 + 16 – 10 = 7 часов – разница во времени между Калининградом и Якутском. **Ответ: 5 часов.**

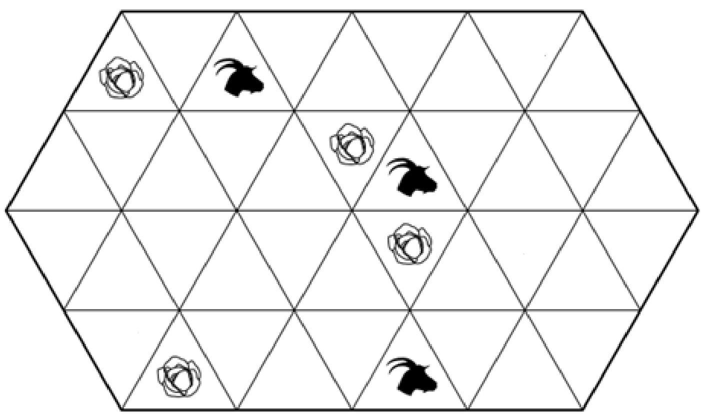
4. Малыш и Карлсон разлили 4 литра варенья по двум банкам и понесли домой. Малыш устал и перелил 2 литра варенья из своей банки в банку Карлсона. От этого у Малыша варенья стало втрое меньше, чем у Карлсона. Сколько варенья стало у Карлсона?

Решение. У Малыша варенья стало втрое меньше, чем у Карлсона. Значит, у Малыша осталась четвертая часть от всего варенья, т.е. 1 литр, а у Карлсона всё остальное: 3 литра.

Ответ: 3 литра.

5. Фермер построил загон шестиугольной формы и разделил его на равные треугольники со стороной 1 м (как показано на рисунке). В некоторых треугольниках он решил посадить капусту, а в некоторые запустил коз. Теперь предприимчивому фермеру интересно, какой минимальной общей длины нужно построить забор по сторонам треугольников, чтобы ни одна коза не могла добраться до капусты. Определите длину полученного забора и объясните, как он расположен. Минимальность длины забора можно не доказывать.

Решение. Есть и другие способы построения забора длиной 7 м, забор меньшей длины построить нельзя.



Ответ: 7 м.

6. Вася и Петя любят кольца. Однако Петя любит соединенные кольца, а Вася нет. Помогите Васе определить, какое минимальное количество колец надо разрезать, чтобы все три кольца, изображенные на рисунке, отделились друг от друга?

Решение. Кольцо 3 находится над кольцом 2, поэтому, если разрезать кольцо 1, то все кольца отделятся друг от друга.

Аналогично можно разрезать кольцо 3.

Ответ: 1.

7. К Одинокой горе пришли всего 18 хоббитов и гномов. Во время похода каждый гном познакомился с 4 хоббитами, а каждый хоббит – с 5 гномами. Сколько всего в отряде было гномов и сколько хоббитов? (Пояснение: знакомство всегда взаимно.)

Решение. Из условия задачи ясно, что хоббитов меньше, чем гномов, и их количества относятся, соответственно, как 4 : 5. Отсюда очевидно, что если всего персонажей 18, то хоббитов $2 \cdot 4 = 8$, а гномов $2 \cdot 5 = 10$.

Ответ: 10 гномов и 8 хоббитов.

8. На круговом шоссе расположено 7 городов. Уникум обнаружил, что в каком бы городе он не оказался, до одного из двух ближайших по часовой стрелке городов он может доехать за 40 минут на велосипеде, а до другого, также по часовой стрелке, – за 20 минут на мопеде. И на мопеде, и на велосипеде Уникум движется с постоянной скоростью без остановок, причем на мопеде быстрее. За сколько минут Уникум сможет проехать один круг по всему шоссе на мопеде?

Решение. 1. Пусть x, y м/мин – скорости, соответственно, велосипеда и мопеда. Назовем города, расположенные на круговом шоссе, как A, B, C, D, E, F, G (по часовой стрелке в указанном порядке).

2. По условию задачи расстояния между любыми парами соседних городов равны. Если расстояние между двумя соседними городами (например, B и C,

C и D) равно $20y$ м, а городами B и D равно $40x$ м, то скорости велосипеда и мопеда равны, что не соответствует условию задачи.

3. Следовательно, расстояние между любыми двумя соседними городами (например, B и C, C и D) равно $40x$ м, а городами A и C, B и D, C и E равно $20y$ м. Так как расстояния между любыми парами соседних городов равны, то Уникум проезжает расстояние между соседними городами за 10 мин, а один круг на шоссе за – 70 мин.

Ответ: 70 минут.

9. Обучающиеся детского технопарка “Кванториум” решили отправиться в лодочный поход. Если ребят посадить по четыре человека в лодку, то останется две незанятых лодки. Если же рассадить по три человека, то все лодки окажутся занятыми и еще пять человек останутся без места. Определите, сколько обучающихся решили отправиться в лодочный поход и сколько было лодок.

Решение. 1. $4 \cdot 2 + 5 = 13$ человек – разность между количеством обучающихся в случае, когда в каждой лодке сидело по четыре человека, и случаем когда в каждой лодке сидело по три человека.

Полученная разность равняется количеству лодок.

2. $4 \cdot (13 - 2) = 44$ – обучающихся решили отправиться в лодочный поход.

Ответ: 44 обучающихся, 13 лодок.

10. Незнайка решил потренировать свои вычислительные навыки. Он написал на доске число 2017 и решил каждый день, за исключением выходных, прибавлять к числу, записанному на доске, или вычитать из него номер дня в неделе (в понедельник прибавляется или вычитается 1, во вторник – 2, в среду – 3, в четверг – 4, в пятницу – 5). После выполнения действия на доске записывается новое число, а старое стирается. Ровно через 7 недель Незнайка увидел, что на доске опять записано число 2017, не ошибся ли Незнайка в своих вычислениях? Знайка, который все 7 недель наблюдал за вычислениями Незнайки, утверждает, что должно было получиться число 2018. Могло ли в результате описанных вычислений получиться число 2018?

Решение. 1. Каждую неделю Незнайка прибавляет к числу, записанному на доске, или вычитает из него поочередно числа 1, 2, 3, 4, 5. Среди указанных чисел три нечетных, поэтому через неделю на доске будет записано число другой четности. Исходное число было нечетным, следовательно, через нечетное число недель (через 7 недель) на доске будет записано четное число. Незнайка ошибся в вычислениях.

2. Для получения числа 2018, например, достаточно вы полнить следующие действия. Первые три недели числа только добавляются, следующие три недели числа только вычитаются. Тогда после 6 недель на доске будет опять записано число 2017. Действия в последнюю неделю

$$2017 + 1 + 2 - 3 - 4 + 5 = 2018.$$

Возможны и другие способы получения числа 2018.

Ответ: Незнайка ошибся в вычислениях, а число 2018 получиться могло.

Задания VIII областной открытой олимпиады

по математике «Уникум», 23 мая 2017

4 класс

Длительность – 70 минут. Количество заданий – 10.

Решение задач должно содержать необходимые пояснения. Все варианты ответов, если их несколько, должны быть указаны. Если ответ один, то должны быть объяснения, почему нет других вариантов ответов. Желаем успеха!

1. Выполните действия: $125 \cdot 25 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 2017$**. Укажите самый простой порядок выполнения действий.**

Решение. $125 \cdot 25 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 11 = (125 \cdot 8) \cdot (4 \cdot 25) \cdot 2017 = 201\ 700\ 000$ (порядок действий может быть и другой).

Ответ: 201 700 000.

2. В 8 одинаковых бутылках 16 литров кваса (бутылки полностью наполнены). Сколько потребуется таких бутылок, чтобы разлить 24 литра кваса?

Решение. 1. 16 : 8 = 2 литра – вместимость одной бутылки.

2. 24 : 2 = 12 бутылок – потребуется для 24 литров кваса.

Для задачи можно составить выражение: 24 : (16 : 8).

Ответ: 12 бутылок.

3. На столе лежат 17 монет. По крайней мере, одна из них двухрублевая. Какие бы две монеты не взять, хотя бы одна из них будет достоинством 5 рублей. Какая сумма лежит на столе?

Решение. Если взять двухрублевую монету и любую другую, одна из них будет пятирублевой. Значит любая монета за исключением двухрублевой монеты – пятирублевая. И на столе лежит $5 \cdot 16 + 2 = 82$ рубля.

Ответ: 82 руб.

4. Малыш и Карлсон разлили 6 литров варенья по двум банкам и понесли домой. Малыш устал и перелил 2 литра варенья из своей банки в банку Карлсона. От этого у Малыша варенья стало вдвое меньше, чем у Карлсона. Сколько варенья было у Карлсона первоначально?

Решение. У Малыша варенья стало вдвое меньше, чем у Карлсона. Значит, у Малыша осталась третья часть от всего варенья, т.е. 2 литра, а у Карлсона все остальное: 4 литра. Тогда первоначально у Карлсона было 2 литра варенья.

Ответ: 2 литра.

5. Группа из 23 школьников стали делить грибы, которые они собрали в лесу, между собой. Если они разделят грибы из двух лукошек поровну (по количеству), то останется один лишний гриб. Если разделят грибы из трех лукошек поровну, то останется 13 лишних грибов. Определите, какое наименьшее количество грибов может быть в одном таком лукошке. Количество грибов во всех лукошках было одинаково.

Решение. 1. Разность количества грибов, которые школьники поделили между собой, во втором и первом случаях должна делиться на 23. Эта разность равна количеству грибов в одном лукошке минус 12 грибов (если разность отрицательна и кратна 23, то число грибов в лукошке должно быть отрицательно, что невозможно). Наименьшее неотрицательное число, делящееся на 23, равно 0. Поэтому минимальное число грибов в лукошке 12.

2. Число 12 удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 12.

6. Вася и Петя любят кольца. Однако Петя любит соединенные кольца, а Вася нет. Помогите Васе определить, какое минимальное количество колец надо разрезать, чтобы все пять колец отделились друг от друга?

Решение. 1. Кольцо 3 находится над кольцом 2, поэтому, если разрезать кольцо 1, то кольца 1, 2, 3, и 5 отделятся друг от друга. Для разделения колец 3 и 4 достаточно разрезать одно из них.

2. Меньше двух разрезов недостататочно, так как кольца 1 и 5, а также кольца 3 и 4 соединены между собой. Один разрез может убрать только одно из указанных соединений.

Возможен выбор и других пар разрезаемых колец.

Ответ: 2.

7. У Гендальфа есть необычная доска для игры в шахматы, она меньшего размера, чем обычно: 5 на 5. Сколькими способами можно заштриховать на этой доске одну или несколько клеток, чтобы они образовывали различные по расположению или размеру квадраты? Гендальфу удалось получить 32 таких квадрата, удастся ли Вам улучшить его результат?

Решение. 1. 25 квадратов – из одной клетки.

2. 16 квадратов – из четырех клеток. Левой верхней клеткой выбранного квадрата, в этом случае может являться любая клетка квадрата 4 на 4.

3. 9 квадратов – из девяти клеток. Левой верхней клеткой выбранного квадрата, в этом случае может являться любая клетка квадрата 3 на 3.

4. 4 квадрата – из 16 клеток. Левой верхней клеткой выбранного квадрата, в этом случае может являться любая клетка квадрата 2 на 2.

5. 1 квадрат (весь исходный квадрат) – из 25 клеток.

6. 25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 55.

Ответ: 55.

8. В трактире городка Бри близ Шира посетители на вечер выбирают роли лжецов и правдолюбов. Первые всегда говорят неправду, вторые всегда правдивы. Торин присел за столик с тремя местными жителями и спросил у каждого: “Сколько среди двух твоих друзей правдолюбов?” На что получил следующие ответы.

Первый: “Ни одного”.

Второй: “Один”.

Что сказал третий?

Решение. Предположим, что первый сказал правду. Тогда оба его соседа лгут.

1	2	3
П	Л	Л

Но в этом случае второй сказал правду – противоречие.

Значит, первый солгал.

Предположим, что второй солгал.

1	2	3
Л	Л	Л

Тогда третий должен также быть лжецом. Но в этом случае слова первого оказались правдивы, снова противоречие.

Значит, второй сказал правду.

1	2	3
Л	П	П

Но тогда и третий должен говорить правду. Тогда он скажет «один».

Ответ: один.

9. Хоббиты Фили и Кили смотрят на аквариум и наблюдают за траекторией рыбки, перерисовывая ее себе на пергамент. Причем они смотрят на соседние стенки аквариума. Фили изобразил траекторию справа (на рисунке), Кили – слева (на рисунке). Какую траекторию изобразил бы Радагаст, который наблюдал за рыбкой сверху?

Ответ:

10. Уникум знакомился с делением отрезка на части. Вначале он отметил на отрезке точки, делящие его на 15 равных частей. Затем он стер отмеченные точки и на том же отрезке нарисовал точки, делящие его на 25 равных частей. Далее он опять стер отмеченные точки и на том же отрезке нарисовал точки, делящие его на 35 равных частей. Затем Уникум задумался, на сколько частей удалось разделить отрезок, если бы точки не стирались? Помогите Уникуму решить эту задачу.

Решение. Точек первого вида 14, второго – 24, третьего – 34. Причем точки, делящие отрезок на 5 частей, отмечались в каждом из трех случаев, так как

$$\frac{1}{5}=\frac{3}{15}=\frac{5}{25}=\frac{7}{35},$$

$$\frac{2}{5}=\frac{6}{15}=\frac{10}{25}=\frac{14}{35},$$

$$\frac{3}{5}=\frac{9}{15}=\frac{15}{25}=\frac{21}{35},$$

$$\frac{4}{5}=\frac{12}{15}=\frac{20}{25}=\frac{28}{35}.$$

Таким образом, на отрезке было отмечено 14 + 24 + 34 – 4 · 2 = 64 различные точки. 64 различные точки делят отрезок на 65 частей.

Ответ: 65.

Задания VIII областной открытой олимпиады

по математике «Уникум», 23 мая 2017

5 класс

Длительность – 80 минут. Количество заданий – 10.

Решение задач должно содержать необходимые пояснения. Все варианты ответов, если их несколько, должны быть указаны. Если ответ один, то должны быть объяснения, почему нет других вариантов ответов. Желаем успеха!

1. Выполните действия: $250\cdot125\cdot8\cdot4\cdot2017$**.**

Укажите самый простой порядок выполнения действий.

Решение. $250\cdot125\cdot8\cdot4\cdot2017=(125\cdot8)\cdot(4\cdot250)\cdot2017=2\ 017\ 000\ 000$ (порядок действий может быть и другой).

Ответ: 2 017 000 000.

2. Малыш и Карлсон делили 6 литров варенья, разлили их по двум банкам и понесли домой. Малыш устал и перелил часть варенья из своей банки в банку Карлсона. От этого у Малыша варенья стало в пять раз меньше, чем у Карлсона. Сколько варенья стало у Карлсона?

Решение. У Малыша варенья стало в пять раз меньше, чем у Карлсона. Значит, у Малыша осталась шестая часть от всего варенья, т.е. 1 литр, а у Карлсона все остальное: 5 литров.

Ответ: 5 литров.

3. В пятом классе учится 20 девочек, что составляет $\frac{4}{7}$ **от всех учащихся класса. Сколько всего учеников в классе?**

Решение. 20 : 4 · 7 = 35.

Ответ: 35.

4. Группа из 23 школьников стали делить грибы, которые они собрали в лесу, между собой. Если они разделят грибы из четырех лукошек по-

ровну (по количеству), то останется один лишний гриб. Если разделят грибы из шести лукошек поровну, то останется 13 лишних грибов. Определите, какое наименьшее количество грибов может быть в одном таком лукошке. Количество грибов во всех лукошках было одинаково, грибы на части не разрезались.

Решение. 1. Разность количества грибов, которые школьники поделили между собой во втором и первом случаях, должна делиться на 23. Эта разность равна количеству грибов в двух лукошках минус 12 грибов (если разность отрицательна и кратна 23, то число грибов в лукошке должно быть отрицательно, что невозможно).

Если количество грибов в одном лукошке обозначить через x, то указанная разность равна

$$(6x - 13) - (4x - 1) = 2x - 12.$$

2. Если $2x - 12 = 0$, то $x = 6$, что удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 6.

5. В холле детского технопарка “Кванториум” г. Липецка для облицовки полов используются плитки трех цветов: серого, синего и коричневого. Уникум увидел, что в некотором квадрате размером 4 плитки на 4 плитки (см. рисунок), плитки *A* и *B* имеют серый цвет. Также известно, что каждой серой плитке соседствуют (по стороне) ровно две коричневые плитки (кроме коричневых плиток у серой плитки могут быть и другие соседи), а каждой коричневой плитке соседствуют (по стороне) ровно две синие плитки (кроме синих плиток у коричневой плитки могут быть и другие соседи). Сколько существует различных вариантов расположения плиток в указанном квадрате?

A			

			В

Решение. Из условия задачи однозначно следует следующая раскраска. Цвет ячеек *x, y, z, t* пока не определен.

Сер	***Кор***	***Син***	***t***
Кор	***Син***	***z***	***Син***
Син	***y***	***Син***	***Кор***
x	***Син***	***Кор***	***Сер***

У ячеек *x, y, z, t* нет коричневых соседей, поэтому они не могут быть серыми. У ячеек *y* и *z* все четыре соседа синие, поэтому они не могут быть коричневыми, а значит они синие. Каждая из ячеек *x* и *t* может быть синей или коричневой. Количество возможных вариантов раскраски $2 \cdot 2 = 4$.

Ответ: 4.

6. Четверо детей сказали друг о друге следующее.

Аня: “Шоколадку съели трое: Борис, Валера и Галя”.

Борис: “Шоколадку не ели трое: Аня, Валера и Галя”.

Валера: “Аня и Борис солгали”.

Галя: “Аня, Борис и Валера сказали правду”.

Сколько детей не солгали?

Решение. 1. Высказывания Ани и Бориса противоречат друг другу, следовательно, Галя наверняка солгала.

2. Далее возможны два случая.

2.1. Валера сказал правду. Тогда солгали и Аня, и Борис, то есть правду сказал один ребенок. Например, подойдет вариант, когда все, кроме Валеры, съели шоколадку.

2.2. Валера солгал. Тогда правду сказала либо Аня, либо Борис. И в этом случае сказал правду один ребенок. **Ответ: 1.**

7. Хоббиты в Шире делятся по увлечениям на садоводов и огородников, причем некоторые чересчур трудолюбивые хоббиты занимаются и тем, и другим. Гендальф провел социологический опрос и выяснил, что среди огородников каждый восьмой – еще и садовод, а среди садоводов

каждый четвертый – еще и огородник. Какой же вид занятий в Шире пользуется наибольшей популярностью – огородничество или садоводство, и во сколько раз больше одних, чем других?

Решение. Трудолюбивые хоббиты составляют среди огородников 1/8 часть, а среди садоводов – 1/4. Причем это одни и те же трудолюбивые хоббиты. Отсюда очевидно, что огородников в Шире больше. Соотношение 8 : 4 дает ответ на вопрос – во сколько раз, в два раза.

Пояснение. Предположим, что трудолюбивых хоббитов, например, двое. Тогда огородников $2 \cdot 8 = 16$, а садоводов по аналогии 8. 16 в два раза больше 8. Если трудолюбивых хоббитов x, то огородников $16x$, а садоводов $8x$.

Ответ: огородников в 2 раза больше, чем садоводов.

8. Случайным образом выбраны пять различных натуральных чисел. Всегда ли среди них можно выделить три числа, сумма которых кратна 3?

Решение. Остатки при целочисленном делении на 3 могут быть равны: 0, 1 или 2. Если один из остатков встречается в наборе три раза, то сумма соответствующих трех чисел кратна трем. Если ни один из остатков не встречается в наборе трижды, то значит, два остатка встречаются дважды, а один остаток один раз. Выделим три числа, имеющие различные остатки при делении на 3, их сумма делится на 3.

Ответ: всегда.

9. Из города Липецк в город Санкт-Петербург и из города Санкт-Петербург в город Липецк одновременно навстречу друг другу выехали два автомобиля. Через час, после начала движения, расстояние между ними уменьшилось на пятую часть. Еще через 6 часов расстояние между ними стало равно 472 км, и ни один из автомобилей не завершил путь. Каково расстояние от Липецка до Санкт-Петербурга?

Решение. 1. $\frac{7}{5}$ пути – часть пути, которую преодолели автомобили вместе за 7 часов. Так как полученная часть пути больше 1, то автомобили к этому времени уже встретились, и расстояние между ними, равное 472 км, составляет $\frac{7}{5} - 1 = \frac{2}{5}$ от всего пути.

2. 472 : 2 · 5 = 1 180 км – искомое расстояние.

Ответ: 1 180 км.

10. В трактире городка Бри близ Шира посетители на вечер выбирают роли лжецов и правдолюбов. Первые всегда говорят неправду, вторые всегда правдивы. Торин наблюдал за следующей игрой. Каждый посетитель сказал о каждом, кто он “Правдолюб” или “Лжец”. Педантичный Торин насчитал, что и тех, и других слов было сказано поровну. Сколько в трактире могло быть лжецов, а сколько правдолюбов, если всего там было 16 посетителей, не считая Торина? Торин в игре не участвовал.

Решение. Подумаем, в каком случае, и при каких сочетаниях, посетители произнесут одинаковое количество раз «лжец» и «правдолюб». Всего возможны три варианта пар:

1) Л – Л; 2) Л – П; 3) П – П (Л – лжец, П – правдолюб).

В первом случае оба скажут друг другу «правдолюб». Во втором – лжец назовет правдолюба лжецом, равно как и правдолюб лжеца – лжецом. В третьем случае оба назовут друг друга правдолюбами.

Варианты пар	Лжец – лжец	Лжец – правдолюб	Правдолюб – правдолюб
Произнесенные фразы	Правдолюб – правдолюб	Лжец – лжец	Правдолюб – правдолюб

Всего пар посетителей было 16 · 15 : 2 = 120. В каждой паре сказанные слова одинаковы. Следовательно, пар “Лжец-Правдолюб” ровно половина, т.е. 60. С другой стороны, количество пар “Лжец-Правдолюб” равно произведению количества лжецов на количество правдолюбов. Следовательно, в трактире было 10 лжецов и 6 правдолюбов или 6 лжецов и 10 правдолюбов.

Ответ: 1) 10 лжецов и 6 правдолюбов; 2) 6 лжецов и 10 правдолюбов.

Задания VIII областной открытой олимпиады

по математике «Уникум», 23 мая 2017

6 класс

Длительность – 80 минут. Количество заданий – 10.

Решение задач должно содержать необходимые пояснения. Все варианты ответов, если их несколько, должны быть указаны. Если ответ один, то должны быть объяснения, почему нет других вариантов ответов. Желаем успеха!

1. Решите уравнение

$$\mathbf{2x + 243 + 576 + 424 + 757 = 1241 + 1542 + 759 + 458 + 17 + x.}$$

Выберите самый простой способ решения.

Решение. $2x + (243 + 757) + (576 + 424) = (1241 + 759) + (1542 + 458) + 17 + x.$

$x = 2017.$

Возможны и другие простые способы решения.

Ответ: 2017.

2. В ящике лежат шары: 12 красных, 10 синих и 8 зеленых. Какое минимальное количество шаров надо вынуть, чтобы гарантированно достать два шара одного цвета?

Решение. Не повторяя цвета можно выбрать максимум 3 шара. Из четырех шаров обязательно будут, как минимум, два шара будут одного цвета.

Ответ: надо вынуть 4 шара.

3. В шестом классе учатся 12 мальчиков, что составляет $\frac{6}{7}$ от числа девочек, обучающихся в этом классе. Сколько всего учеников в классе?

Решение. 1. $12 : 6 \cdot 7 = 14$ – число девочек, обучающихся в классе.

2. $12 + 14 = 26$ – всего учеников в классе.

Ответ: 26.

4. Из города Липецк в город Воронеж отправился автомобиль, а навстречу ему из города Воронеж в город Липецк другой автомобиль. С какой средней скоростью ехал каждый из автомобилей, если они встретились через 40 минут и скорость одного из автомобилей была в полтора раза больше, чем скорость другого? Расстояние между городами Липецк и Воронеж равно 120 км.

Решение. 1. 40 мин = $\frac{2}{3}$ ч.

2. Пусть скорость одного автомобиль x км/ч, а другого $1{,}5x$ км/ч. Тогда путь, который преодолели автомобили соответственно $\frac{2}{3}x$ км и x км. Получим уравнение $\frac{2}{3}x + x = 120$.

Отсюда $\frac{5}{3}x = 120$, x = 72 км/ч. Скорость второго автомобиля 1,5 · 72 = 108 км/ч.

Ответ: 72 км/ч, 108 км/ч.

5. Вася и Петя любят кольца. Однако Петя любит соединенные кольца, а Вася нет. Имеется 2017 колец, каждое из которых соединено со всеми остальными. Помогите Васе определить, какое минимальное количество колец надо разрезать, чтобы все кольца отделились друг от друга? Пример соединения двух колец приведен на рисунке.

Решение. Разрезая одно кольцо мы отделяем его от остальных колец. Если хотя бы два кольца не разрезаны, то они соединены между собой.

Следовательно, меньше 2016 разрезаний недостаточно. Поочердно разрезая 2016 колец мы получим требуемое отделение колец друг от друга.

Ответ: 2016.

6. Бильбо захотел посчитать свои запасы на зиму (в Шире есть и зима) и представил данные о количестве провианта в виде таблицы с числами, содержащей 10 столбцов. При этом суммы чисел в каждом столбце

равны 10, а в каждой строке равны 20. Сколько строк имеет таблица Бильбо?

Решение. Суммируя числа по всем строкам и складывая, получим то же значение, что и по столбцам (мы же складываем одни и те же числа). Т.к. столбцов 10, и сумма в каждом равна 10, то сумма всех чисел равна $10 \cdot 10 = 100$. Подсчитать количество строк можно, поделив общую сумму на сумму чисел в каждой строке: $100 : 20 = 5$.

Данная задача имеет и другое решение. Т.к. общая сумма по строкам и по столбцам одинакова, а в каждой строке суммы в два раза больше, чем в каждом столбце, то строк, наоборот, в два раза меньше: $10 : 2 = 5$.

Ответ: 5.

7. Прямоугольник разбит на четыре меньших прямоугольника двумя прямолинейными разрезами. Периметры трех из них, начиная с левого верхнего и далее по часовой стрелке, равны 2016, 2018 и 2020. Найдите периметр четвертого прямоугольника.

Решение. Обозначим длины отрезков как показано на рисунке. Тогда, искомый периметр равен $2 \cdot (x + y) = 2 \cdot (z + y) + 2 \cdot (x + t) - 2 \cdot (z + t) = 2016 + 2020 - 2018 = 2018$.

Возможны другие способы решения.

Ответ: 2018.

8. Какое минимальное количество различных натуральных чисел достаточно выбрать случайным образом, чтобы среди них всегда можно было выделить три числа, сумма которых кратна 3?

Решение. 1. Докажем, что пяти чисел достаточно. Остатки при целочисленном делении на 3 могут быть равны: 0, 1 или 2. Если один из остатков встречается в наборе из пяти числе три раза, то сумма соответствующих трех чисел кратна трем. Если ни один из остатков не встречается в наборе из пяти чисел трижды, то значит, два остатка встречаются дважды, а один остаток один раз. Выделим три числа, имеющие различные остатки при делении на 3, их сумма делится на 3.

2. Четырех чисел недостаточно, контрпример: 1, 4, 2, 5.

Ответ: 5.

9. В стране Уникумов светит три Солнца. Поэтому каждый предмет, в том числе каждый Уникум, отбрасывает три тени. Во время общего собрания всех жителей страны, оказалось, что на каждого Уникума, кроме президента страны, падает ровно одна тень от другого жителя этой страны. Остальные тени, в том числе тени президента, падали на центральную площадь. На президента ни одна тень не падала. Общее число теней, падающих на центральную площадь, равнялось 2017. Сколько жителей в стране Уникумов?

Решение. 1. 2017 – 3 = 2014 теней – число теней, падающих на центральную площадь, без учета теней президента.

2. Если не учитывать тени, падающие на Уникумов, то можно считать, что каждый Уникум в среднем отбрасывал ровно две тени. Следовательно, число Уникумов, без президента, равно 2014 : 2 = 1007. Всего жителей страны 1007 + 1 = 1008.

Ответ: 1008.

10. В 2016 году на олимпиаде Уникум за 6 класс было предложено 6 задач. Каждую задачу решили 50 человек, но никакие два школьника не решили в общей сложности все задачи. Каково минимально возможное число участников олимпиады?

Решение. 1. Предположим, что число участников меньше 100. Тогда, по принципу Дирихле, кто-то (назовем его А) решил 4 или более задач.

1.1. Пусть А решил 5 задач. Тогда 6-ю задачу не решил никто, иначе на двоих они бы решили все, что противоречит условию.

1.2. Пусть А решил 4 задачи, тогда 5-ю и 6-ю задачи вместе не решил никто. Тех, кто решил 5-ю – 50, и тех, кто решил 6-ю – 50. А всего их 100, что противоречит предположению.

1.3. Предположение неверно. Участников не меньше 100.

2. Покажем, что участников могло быть ровно 100. Пусть 25 человек решили 1, 2, 3 задачи; 25 – 3, 4, 5; 25 – 5, 6, 1; и 25 – 2, 4, 6. Нетрудно проверить, что эта ситуация соответствует условию.

Ответ: 100.

Список литературы

1. Быковская, А.М. Занимательные математические задачи. Дополнительные занятия для учащихся 6 классов: Учебное пособие. / А.М. Быковская, Г.Я. Куклина. – 2-е изд., испр. – Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2010. – 88 с.
2. Васильев, Н.Б. Избранные олимпиадные задачи. Математика. / Н.Б. Васильев, А.П. Савин, А.А. Егоров. – М.: Бюро Квантум, 2007. – 60 с. (Библиотека «Квант», вып. 100, приложение к журналу «Квант» №2 / 2007).
3. Воробьев, Г.А. Сборник заданий математических олимпиад «УНИКУМ» для обучающихся 3-6 классов. Учебное пособие. / Г.А. Воробьев, И.А. Шуйкова, П.Н. Азаров. – 1-е изд. – Липецк: МАУ ДО «Центр дополнительного образования «Стратегия», 2015. – 32 с.
4. Воробьев, Г.А. Задачи с игровым содержанием на факультативных занятиях по математике / Г.А. Воробьев, И.А. Шипилов. // Интеграционные тенденции современной науки: Сб. матер. III межвузовской студенческой конференции – Липецк: ЛГПУ, 2010. – С. 193-198.
5. Дрозина, В.В. Механизм творчества решения нестандартных задач. / В.В. Дрозина, В.Л. Дильман. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. – 255 с.
6. Канель-Белов, А.Я. Как решают нестандартные задачи. / А.Я. Канель-Белов, А.К. Ковальджи. – М.: МЦНМО, 2008. – 96 с.
7. Спивак, А.В. Математический кружок. – М.: Посев, 2003. – 128 с.
8. Турецкий, Е.Н. Как научиться решать задачи. / Е.Н. Турецкий, Л.М. Фридман – М.: Просвещение, 1989. – 192 с.
9. Фарков, А.В. Математические олимпиады. – М.: Экзамен, 2006. – 160 с.
10. Чамян, П.Г. Инварианты в школе / П.Г. Чамян, Г.А. Воробьев // Инновации и информационные технологии в образовании [Электронный ресурс] / Сборник научных трудов III Международной научно-практической конференции. - Липецк, 09, 29-30 апреля 2010 г. – Липецк: ЛГПУ, 2010. – 1 электрон. опт. диск. – ISBN 978-5-88526-483- 9.
11. Чамян, П.Г. Инварианты: одинаковые и разные. / П.Г. Чамян, Г.А. Воробьев

// Интеграционные тенденции современной науки: материалы III межвузовской науч.-практ. конференции – Липецк: ЛГПУ, 2010. – С. 25-29.

12. Шень А. Игры и стратегии с точки зрения математики. – М.: МЦНМО, 2007. – 40 с.

13. Заочная физико-технологическая школа МФТИ [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.school.mipt.ru. Дата обращения: 15.08.2017.

14. Открытая олимпиада «Уникум» (3-6 классы) [Электронный ресурс] // Сайт «Открытые олимпиады для школьников Липецкой области». Режим доступа: http://openolymp.strategy48.ru/?q=node/48. Дата обращения: 1.02.2017.

15. Портал Всероссийской олимпиады школьников [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.rosolymp.ru. Дата обращения: 1.02.2017.

16. Сайт заочной информационно-математической академии Липецка для школьников 4-6 классов. Режим доступа: http://zimalip.ru. Дата обращения: 1.02.2017.

17. Турнир Городов – международная математическая олимпиада для школьников [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.turgor.ru. Дата обращения: 1.02.2017.

Оглавление

Учебное издание для внутреннего использования

Сборник заданий VIII областной открытой олимпиады по математике «Уникум» для учащихся 3-6 классов

Учебное пособие

Составители: Г.А. Воробьев, И.А. Шуйкова, П.Н. Азаров, М.В. Подаев

Подписано в печать 2017 г. Бумага 80 г/м^2.

Формат 60х84/16. Гарнитура «Times New Roman».

Усл. печ. л. 2,0. Тираж 50 экз.

Отпечатано в типографии детского технопарка «Кванториум».

Адрес:398016, Липецк, ул. Космонавтов, 20/3. Тел.: (4742) 72-70-84.