Управление образования и науки Липецкой области
Государственное областное автономное образовательное учреждение
«Центр поддержки одаренных детей «Стратегия»

Рассмотрена и принята на заседании Педагогического совета ГОАОУ «Центр поддержки одаренных детей «Стратегия»	**УТВЕРЖДАЮ** **Директор ГОАОУ «Центр поддержки одаренных детей «Стратегия»**
	___________________ И.А. Шуйкова
протокол от 18.12.2019 № 3	**приказ от 19.12.2019 № 242**

Дополнительная общеобразовательная программа «Олимпиадная подготовка по математике» для учащихся 10 (11) классов

Направленность программы: естественнонаучная
Уровень программы: углубленный
Срок реализации: 1 год
Возраст обучающихся: 16-17 лет

Автор программы:
Воробьев Г.А., преподаватель групп
олимпиадной подготовки
ГОАОУ «Центр поддержки
одаренных детей «Стратегия»

г. Липецк, 2019

Оглавление

1. Комплекс основных характеристик

1.1. Пояснительная записка

На занятиях оказывается методическая помощь при подготовке учащихся к участию в различных этапах Всероссийской олимпиады по математике, вузовских олимпиадах по математике. При проведении занятий акцент делается на развитие математического мышления школьников, совершенствования логики проведения математических рассуждения, пробуждения или закрепления интереса к углубленному изучению предмета.

1.1.1. Направленность программы

Направленность программы: естественнонаучная.

Уровень программы: углубленная.

1.1.2. Актуальность программы

Актуальность работы Центра определяется потребностью совершенствования методики подготовки учащихся к участию в олимпиадах по математике в аспекте развития познавательного интереса и способностей учащихся к изучению математики.

1.1.3. Отличительные особенности программы

В процессе проведения занятий большое внимание уделяется разбору задач, встречавшихся на различных олимпиадах по математике. Рассматриваются также некоторые типичные для нестандартных задач темы. Анализируются задачи, ранее вызывавшие затруднения учащихся. Проводится проверка усвоения материала в форме участия в различных олимпиадах, в том числе олимпиадах Центра «Стратегия».

1.1.4. Адресат программы

Школьники, проявляющие интерес к углубленному изучению математики.

Возраст обучающихся 16-17 лет.

1.1.5. Объем программы

Общее количество часов: 128.

Продолжительность программы: 8,5 месяцев (январь-май, сентябрь-декабрь).

1.1.6. Форма обучения

Форма проведения занятий очная, возможна дистанционная форма проведения занятий.

1.1.7. Методы обучения, в основе которых лежит способ организации занятий

Лекция, семинар (практическое занятие), тренинг, модульное обучение, дистанционное обучение, кейс-стади (метод разбора конкретных ситуаций).

1.1.8. Тип занятий

Лекция, семинар (практическое занятие), мастер-класс, контрольная работа (олимпиада).

1.1.9. Формы проведения занятий

Занятия проводятся еженедельно, 4 академических часа в неделю. Возможна дистанционная форма проведения занятий.

В конце большинства каждого занятий проводится контрольная работа на 30 минут.

1.1.10. Срок освоения программы

Продолжительность программы: 8,5 месяцев (январь-май, сентябрь-декабрь).

1.1.11. Режим занятий

Общее количество часов: 128.

Занятия проводятся еженедельно, 4 академических часа в неделю. Возможна дистанционная форма проведения занятий.

1.2. Цели и задачи программы

Целью организации занятий является расширение кругозора учащихся, развитие математического мышления, формирование активного познавательного интереса к предмету, воспитание мировоззрения и ряда личностных качеств, средствами углублённого изучения математики и, как следствие перечисленного, успешное участие обучающихся в различные рода математических олимпиадах.

Основная задача занятий: учитывая интересы и склонности учащихся, расширить и углубить знания по предмету, обеспечить усвоение ими программного материала, ознакомить школьников с некоторыми общими идеями современной математики, раскрыть приложения математики на практике.

Задачи направления:

– расширение и углубление знаний и умений учащихся по математике;

– развитие способностей и интересов учащихся;

– развитие математического мышления;

– формирование активного познавательного интереса к предмету;

– знакомство с разделами математики, не рассматриваемыми в школе;

– анализ некоторых специфичных приёмов решения математических задач;

– совершенствование навыков решения нестандартных задач.

В результате изучения курса учащиеся должны:

– научиться доказывать утверждения в общем виде;

– правильно применять основные понятия при решении нестандартных задач;

– уметь работать с дополнительной литературой.

1.3. Содержание программы

1.3.1. Учебный план

№ темы	Название разделов и тем направления	Всего часов	Виды учебных занятий, учебных работ		Формы контроля
			Лекции	Практические занятия	
1.	Написание вступительной контрольной работы	4	0	4	Контрольная работа
2.	Анализ задач вступительной контрольной работы	4	0	4	Устное собеседование
3.	Разбор задач регионального этапа Всероссийской олимпиады	4	1	3	Устное собеседование
4.	Метод математической индукции	8	2	6	Контрольная работа
5.	Элементы теории сравнений. Делимость. Остатки. Наибольший общий делитель	8	2	6	Контрольная работа
6.	Принцип “крайнего” в математических задачах	8	2	6	Контрольная работа
7.	Нестандартные планиметрические задачи	8	2	6	Контрольная работа
8.	Векторно-координатный метод решения задач	8	2	6	Контрольная работа
9.	Элементы теории графов в олимпиадных задачах	8	2	6	Контрольная работа
10.	Тригонометрия в олимпиадных задачах	8	2	6	Контрольная работа
11.	Текущий контроль знаний	4	0	4	Олимпиада
12.	Анализ задач вузовских олимпиад	4	1	3	Устное собеседование
13.	Разбор задач муниципального этапа Всероссийской олимпиады по математике	4	1	3	Контрольная работа
14.	Решение типовых задач в соответствии с рекомендациями оргкомитета по проведению муниципального этапа Всероссийской олимпиады по математике	4	1	3	Устное собеседование
15.	Окружность. Вписанные и описанные многоугольники	8	2	6	Контрольная работа

№ темы	Название разделов и тем направления	Всего часов	Виды учебных занятий, учебных работ		Формы контроля
			Лекции	Практические занятия	
16.	Решение неравенств методом “рационализации”	4	1	3	Контрольная работа
17.	Задания с параметрами	8	2	6	Контрольная работа
18.	Нестандартные задачи на применение производной	4	1	3	Контрольная работа
19.	Нестандартные стереометрические задачи	8	2	6	Контрольная работа
20.	Анализ задач регионального этапа Всероссийской олимпиады по математике	8	2	6	Пробная олимпиада
21.	Итоговая контрольная работа	2	0	2	Контрольная работа
22.	Анализ итоговой контрольной работы	2	1	1	Устное собеседование
	Всего	**128**			

1.3.2. Содержание (учебно-тематическое планирование)

Тема 1. Написание вступительной контрольной работы

Практика: анализ материала, решение задач.

Тема 2. Анализ задач вступительной контрольной работы

Теория: информация о теоретическом материале, применявшемся при решении задач контрольной работы.

Практика: анализ материала, решение задач.

Тема 3. Разбор задач регионального тура Всероссийской олимпиады

Теория: информация о теоретическом материале, применявшемся при решении задач анализируемых региональных этапов Всероссийской олимпиады по математике.

Практика: анализ материала, решение задач.

Тема 4. Метод математической индукции

Теория: информация об индукционном методе исследования, особенностях применения математической индукции.

Практика: анализ материала, решение задач на доказательство методом математической индукции.

Тема 5. Элементы теории сравнений. Делимость. Остатки. Наибольший общий делитель

Теория: информация о теории сравнений, свойствах остатков, некоторых других элементах теории чисел.

Практика: анализ материала, решение задач на применение элементов теории чисел.

Тема 6. Принцип “крайнего” в математических задачах

Теория: информация о принципе “крайнего”, особенностей его применения при решении олимпиадных математических задач.

Практика: анализ материала, разбор олимпиадных математических задач на применение принципа “крайнего”.

Тема 7. Нестандартные планиметрические задачи

Теория: информация о теоретическом материале, применяемом при решении планиметрических задач.

Практика: анализ материала, решение нестандартных планиметрические задач.

Тема 8. Векторно-координатный метод решения задач

Теория: информация о векторно-координатном методе решения задач.

Практика: анализ материала, решение задач векторно-координатным методом.

Тема 9. Элементы теории графов в олимпиадных задачах

Теория: информация об элементах теории графов, её применении при решении олимпиадных математических задач.

Практика: анализ материала, решение олимпиадных математических задач с использованием элементов теории графов.

Тема 10. Тригонометрия в олимпиадных задачах

Теория: информация о тригонометрии.

Практика: анализ материала, решение олимпиадных тригонометрических задач.

Тема 11. Текущий контроль знаний (олимпиада)

Практика: анализ материала, решение задач.

Тема 12. Анализ задач вузовских олимпиад

Теория: информация о теоретическом материале, применявшемся при решении задач анализируемых вузовских (перечневых) олимпиад по математике.

Практика: анализ материала, решение задач.

Тема 13. Разбор задач муниципального этапа Всероссийской олимпиады по математике

Теория: информация о теоретическом материале, применявшемся при решении задач анализируемых муниципальных этапов Всероссийской олимпиады по математике.

Практика: анализ материала, решение задач.

Тема 14. Решение типовых задач в соответствии с рекомендациями оргкомитета по проведению муниципального этапа Всероссийской олимпиады по математике

Теория: информация о теоретическом материале, применявшемся при решении анализируемых задач.

Практика: анализ материала, решение задач.

Тема 15. Окружность. Вписанные и описанные многоугольники

Теория: информация о теоретическом материале, применяемом при решении планиметрических задач.

Практика: анализ материала, решение нестандартных планиметрические задач.

Тема 16. Решение неравенств методом “рационализации”

Теория: информация о применении метода “рационализации” при решении неравенств.

Практика: анализ материала, решение неравенств с помощью метода “рационализации”.

Тема 17. Задания с параметрами

Теория: информация о заданиях с параметрами и методах их решения.

Практика: анализ материала, выполнение заданий с параметрами.

Тема 18. Нестандартные задачи на применение производной

Теория: информация о производной и её применении, свойствах.

Практика: анализ материала, выполнение заданий на применение производной.

Тема 19. Нестандартные стереометрические задачи

Теория: информация о теоретическом материале, применяемом при решении стереометрических задач.

Практика: анализ материала, решение нестандартных стереометрических задач.

Тема 20. Анализ задач регионального этапа Всероссийской олимпиады по математике

Теория: информация о теоретическом материале, применявшемся при решении задач анализируемых региональных этапов Всероссийской олимпиады по математике.

Практика: анализ материала, решение задач.

Тема 21. Итоговая контрольная работа

Практика: анализ материала, решение задач.

Тема 22. Анализ итоговой контрольной работы

Теория: информация о теоретическом материале, применявшемся при решении задач контрольной работы.

Практика: анализ материала, решение задач.

2. Комплекс организационно-педагогических условий

2.1. Календарный учебный график

Календарно-тематическое планирование

№ п/п	Название тем (разделов)	Обязательный минимум содержания программы	Количество часов	Планируемая дата проведения
1.	Написание вступительной контрольной работы	См. содержание направления	4	январь
2.	Анализ задач вступительной контрольной работы	См. содержание направления	4	январь
3.	Разбор задач регионального тура Всероссийской олимпиады	Решение задач уровня 1-2 или 5-6 регионального этапа	4	февраль
4.	Метод математической индукции	Применение метода математической индукции к решению задач	8	февраль
5.	Элементы теории сравнений. Делимость. Остатки. Наибольший общий делитель	Решение задач на делимость уровня муниципального и регионального этапа	8	февраль
6.	Принцип “крайнего” в математических задачах	Умение применять принцип “крайнего” при решении задач	8	март
7.	Нестандартные планиметрические задачи	Умение решать нестандартные планиметрические задачи уровня муниципального и регионального этапа	8	март
8.	Векторно-координатный метод решения задач	Умение решать нестандартные планиметрические задачи уровня муниципального и регионального этапа	8	апрель
9.	Элементы теории графов в олимпиадных задачах	Изучение элементов теории графов. Решение задач на применение графов.	8	апрель

№ п/п	Название тем (разделов)	Обязательный минимум содержания программы	Количество часов	Планируемая дата проведения
10.	Тригонометрия в олимпиадных задачах	Знание основных тригонометрических тождеств. Умение решать нестандартные тригонометрические задачи.	8	май
11.	Текущий контроль знаний	См. содержание направления	4	май
12.	Анализ задач вузовских олимпиад	Решение задач вузовских олимпиад	4	май
13.	Разбор задач муниципального этапа Всероссийской олимпиады по математике	Решение наиболее сложных задач муниципального этапа	8	октябрь
14.	Решение типовых задач в соответствии с рекомендациями оргкомитета по проведению муниципального этапа Всероссийской олимпиады по математике	Решение наиболее сложных задач муниципального этапа	4	октябрь
15.	Окружность. Вписанные и описанные многоугольники	Умение решать нестандартные планиметрические задачи уровня муниципального и регионального этапа	8	октябрь-ноябрь
16.	Решение неравенств методом “рационализации”	Умение решать с помощью рассматриваемого метода задачи уровня заданий № 15 ЕГЭ и заданий на решение неравенств из перечневых олимпиад	4	ноябрь
17.	Задания с параметрами	Умение решать задания с параметрами уровня № 18 ЕГЭ и заданий с параметрами из перечневых олимпиад	8	ноябрь

№ п/п	Название тем (разделов)	Обязательный минимум содержания программы	Количество часов	Планируемая дата проведения
18.	Нестандартные задачи на применение производной	Умение решать нестандартные задачи на применение производной	4	декабрь
19.	Нестандартные стереометрические задачи	Умение решать нестандартные стереометрические задачи уровня муниципального и регионального этапа	8	декабрь
20.	Анализ задач регионального этапа Всероссийской олимпиады по математике	Решение задач уровня 1-2 или 5-6 регионального этапа	8	декабрь
21.	Итоговая контрольная работа	См. содержание направления	2	декабрь
22.	Анализ итоговой контрольной работы	См. содержание направления	2	декабрь

2.2. Условия реализации программы

Занятия проводятся в учебных аудиториях ГОАОУ «Центр поддержки одаренных детей «Стратегия». Аудитории должны быть оборудованы доской для записей; проектором с экраном или интерактивной доской.

Возможно дистанционное проведение занятий.

2.3. Формы аттестации

Показатели (оцениваемые параметры)	Критерии	Степень выраженности показателя/уровень/балл	Методы
Теоретическая подготовка			
Теоретические знания по разделам программы	Теоретические знания учащегося соответствуют программным требованиям	Учащийся владеет менее чем половиной объёма знаний по программе; уровень минимальный (1-3 балла)	Наблюдение, тестирование, контрольные работы
		Усвоил более половины объёма знаний по программе; уровень средний (4-6 баллов)	
		Освоил весь объём знаний по программе; уровень максимальный (7-9 баллов)	
Практическая подготовка			
Практические умения и способы	Умения и способы действий соответствуют	Владеет менее чем половиной умений и способов действий; уровень минимальный (1-3 балла)	Контрольные задания

Показатели (оцениваемые параметры)	Критерии	Степень выраженности показателя/уровень/балл	Методы
действий, предусмотренные программой	программным требования.	Владеет более чем половиной умений и способов действий; уровень средний (4-6 баллов)	
		Владеет практически всеми умениями и способами действий по программе за учебный период; уровень максимальный (7-9 баллов)	
Творческое отношение к делу, умение воплотить его в готовом решении	Проявляет креативность при выполнении работы (заданий)	Выполняет простейшие практические задания; уровень минимальный (1-3 балла)	Контрольные задания
		Выполняет задания по образцу; уровень средний (4-6 баллов)	
		Выполняет практические задания с элементами творчества; уровень максимальный (7-9 баллов)	
Познавательные универсальные учебные действия			
Умение подбирать и анализировать разные источники информации	Самостоятельно подбирает, анализирует и систематизирует информацию	Испытывает серьёзные затруднения в подборе и систематизации информации, нуждается в помощи педагога; уровень минимальный (1-3 балла)	Анализ исследовательских и проектных работ
		Работает с информационными источниками с помощью педагога или родителей; уровень средний (4-6 баллов)	
		Работает с любыми информационными источниками самостоятельно, трудностей не испытывает; уровень максимальный (7-9 баллов)	
Личностные универсальные учебные действия			
Терпение, воля, самоконтроль	Способен выдерживать нагрузки в течение определённого времени, преодолевать трудности	Терпения хватает менее чем на половину занятия; волевые усилия учащегося побуждаются извне; нуждается в постоянном внешнем контроле; уровень минимальный (1-3 балла)	Наблюдение, анкетирование
		Терпения хватает более чем на половину занятия; к проявлению волевых усилий побуждает частично педагог, частично – сам учащийся; периодически контролирует себя сам; уровень средний (4-6 баллов)	
		Терпения хватает на всё занятия; волевые усилия проявляет всегда самостоятельно; постоянно сам контролирует результаты работы и своего поведения; уровень максимальный (7-9 баллов)	

2.4. Методические материалы

Тема 1. Написание вступительной контрольной работы

Примерное содержание вступительной контрольной работы

1. а) Решите неравенство $\frac{(x-3)^{2017}\cdot(x-4)^{2018}}{(5-x)^{2019}\cdot(x-6)^{2020}} \leq 0.$

б) Найдите наименьшее решение данного неравенства, являющееся квадратом целого числа.

2. а) Решите уравнение $\sin 4x = \sqrt{5} \cdot \cos 2x$.

б) Определите корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{1}{2}; \quad \pi\right]$.

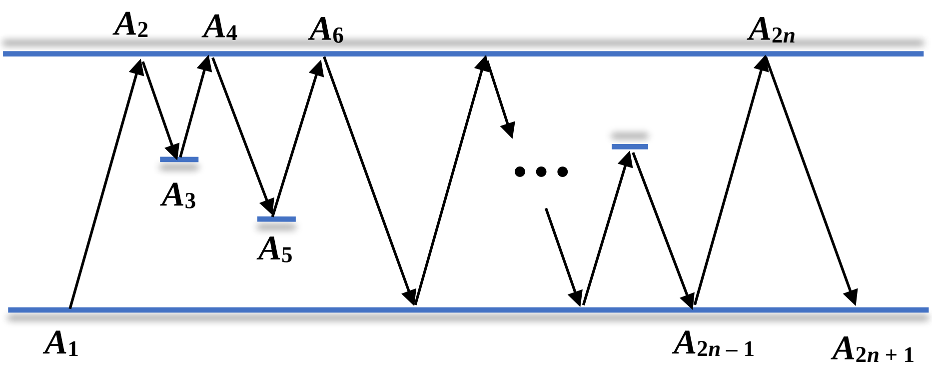
3. Решите уравнение $\frac{3x^2}{x+1} + \frac{x+1}{x^2} = 4$.

4. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки в отношении 2 : 3. Найдите катеты данного треугольника, если радиус окружности, вписанной в него равен 2 см.

5. На гранях игрального кубика указаны некоторые из цифр от 1 до 9. На каждой грани одна цифра, цифры на гранях кубика различны. При подбрасывании кубика подсчитывают сумму чисел на всех гранях кубика, кроме той грани на которую кубик упал, обозначим эту сумму S. Выберите такие конфигурации описанного кубика, при которых вероятность того, что S будет нечетным числом, будет максимальна. Чему равна эта вероятность?

6. Какие натуральные числа можно представить в виде суммы двух взаимно простых натуральных чисел не равных 1?

7. Луч света перемещается в плоскости от точки A_1 до точки A_{2n+1} отражаясь от параллельных зеркальных прямых a и b и нескольких параллельных данным прямым зеркальных отрезков, как показано на рисунке. Определите какое расстояние преодолел луч, если длина отрезка A_1A_{2n+1} равна 100, а синус угла $A_2A_3A_4$ равен $\frac{4\sqrt{6}}{25}$. Из физики известно, что угол падения луча на зеркальную поверхность равен углу отражения.



8. Решите относительно переменной x, для всех значений параметра a, систему неравенств

$$\begin{cases} 2x^2 - 6x + 4 - a \leq 0; \\ x^2 - 6x + 5 + a < 0. \end{cases}$$

Тема 2. Анализ задач вступительной контрольной работы

Тема 3. Разбор задач регионального тура Всероссийской олимпиады

Тема 4. Метод математической индукции

Теория:

Метод *полной математической индукции*.

1. Проверяется справедливость утверждения для $n = 1$.

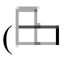
2. Предполагается справедливость утверждения для $n = k$, k – произвольное натуральное число, и с учетом этого предположения устанавливается справедливость утверждения для $n = k + 1$.

Метод *неполной математической индукции*. Доказательство некоторого утверждения, зависящего от n при любом натуральном n, начиная с некоторого натурального $p \geq 2$.

1. Проверяется справедливость утверждения для $n = p$.

2. Предполагается справедливость утверждения для $n = k$, где k – произвольное натуральное число не меньшее p, и с учетом этого предположения устанавливается справедливость утверждения для $n = k+1$.

Практика:

1. Из квадрата клетчатой бумаги размером $2^n \times 2^n$ вырезали одну клетку. Докажите, что полученную фигуру можно разрезать на «уголки» из трёх клеток ().

2. Докажите, что любую сумму, начиная с 8 тугриков, можно выплатить купюрами по 3 тугрика и 5 тугриков.

3. Приведите пример натурального числа, которое равно сумме а) трёх своих различных делителей; б) ста своих различных делителей.

4. Докажите, что при каждом натуральном n, начиная с 3, существует выпуклый n-угольник, имеющий ровно три острых угла.

5. У бородатого многоугольника во внешнюю сторону растет щетина. Его пересекает несколько прямых общего положения, на каждой из которых с одной из сторон растут волосы. В результате многоугольник оказался разбитым на некоторое число частей. Докажите, что хотя бы одна из частей окажется волосатой снаружи.

6. [Игра «Ханойская башня»] Имеется пирамида с n кольцами возрастающих размеров (внизу – самое большое) и еще два пустых стержня той же высоты. Разрешается перекладывать верхнее кольцо с одного стержня на другой, но при этом запрещается класть большее кольцо на меньшее. Докажите, что

а) можно переложить все кольца с первого стержня на один из пустых стержней;

б) это можно сделать не более, чем за $2^n - 1$ перекладываний.

7. Плоскость поделена на области несколькими прямыми. Докажите, что эти области можно раскрасить в два цвета так, чтобы любые две соседние области были раскрашены в различные цвета. (Соседними считаются области, имеющие общий участок границы.)

8. В прямоугольнике $3 \times n$ (3 строки, n столбцов) расставлены фишки трёх цветов по n штук каждого цвета. Докажите, что, переставляя фишки в строчках, можно сделать так, чтобы в каждом столбце были фишки всех трёх цветов.

9. Плоскость поделена на области несколькими прямыми и окружностями. Докажите, что эти области можно раскрасить в два цвета так, чтобы любые две соседние области были раскрашены в различные цвета. (Соседними считаются области, имеющие общий участок границы.)

10. Докажите, что $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

11. На сколько частей делят плоскость n прямых, среди которых нет параллельных и никакие три не пересекаются в одной точке? (Такие прямые называют прямыми «общего положения»)

12. Докажите, что $n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3$ делится на 9 при всех натуральных n.

13. Докажите, что $6^n + 1$ делится на 7 при всех нечётных n.

14. Докажите, что $2^n > 8n - 17$ при всех натуральных n.

15. Докажите, что $n! > 2^n$ при всех натуральных $n \geq 4$.

16. Доказать, что при любом натуральном $n > 1$ верно неравенство $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$.

17. Докажите, что число, состоящее из 243 единиц, делится на 243.

18. Докажите, что, каковы бы ни были натуральное n и вещественное $q \neq 1$, выполняется равенство $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

19. (Зональный тур, 1997-1998, 8.8) На выборах в городскую думу каждый избиратель, если он приходит на выборы, отдает голос за себя (если он является кандидатом) и за тех кандидатов, которые являются его друзьями. Прогноз социологической службы мэрии считается *хорошим*, если в нем правильно предсказано количество голосов, поданных хотя бы за одного кандидата, и *нехорошим* в противном случае. Докажите, что при любом прогнозе избиратели могут так явиться на выборы, что этот прогноз окажется *нехорошим*.

Тема 5. Элементы теории сравнений. Делимость. Остатки. Наибольший общий делитель

Теория:

В теории чисел сравнение по модулю натурального числа n – отношение эквивалентности на кольце целых чисел, связанное с делимостью на n. Факторкольцо по этому отношению называется кольцом вычетов. Совокупность соответствующих тождеств и алгоритмов образует модульную (или модулярную) арифметику.

Определение. Два целых числа a и b сравнимы по модулю натурального числа n, если при делении на n они дают одинаковые остатки.

Теорема. Два целых числа a и b сравнимы по модулю натурального числа n тогда и только тогда, когда их разность $a-b$ делится на n без остатка.

Утверждение «a и b сравнимы по модулю n» записывается в виде: $a \equiv b \pmod{n}$.

Свойства сравнений по модулю.

1. Любые два целых числа a и b сравнимы по модулю 1.

2. Рефлексивности: для любого целого a справедливо $a \equiv a \pmod{n}$.

3. Симметричности: если $a \equiv b \pmod{n}$, то $b \equiv a \pmod{n}$.

4. Транзитивности: если $a \equiv b \pmod{n}$ и $b \equiv c \pmod{n}$, то $a \equiv c \pmod{n}$.

5. Сложение и вычитание сравнений: если $a \equiv b \pmod{n}$ и $c \equiv d \pmod{n}$, то $a+c \equiv b+d \pmod{n}$.

Следствие. К обеим частям сравнения можно прибавить одно и то же целое число: если $a \equiv b \pmod{n}$, то $a+c \equiv b+c \pmod{n}$.

6. Умножение сравнений: если $a \equiv b \pmod{n}$ и $c \equiv d \pmod{n}$, то $ac \equiv bd \pmod{n}$.

Следствие 1. Обе части сравнения можно умножить на одно и то же целое число: если $a \equiv b \pmod{n}$, то $ac \equiv bc \pmod{n}$.

Следствие 2. Обе части сравнения можно возвести в одну и ту же натуральную степень: если $a \equiv b \pmod{n}$, то $a^k \equiv b^k \pmod{n}$.

Система вычетов позволяет осуществлять арифметические операции над конечным набором чисел, не выходя за его пределы. Полная система вычетов по модулю n – любой набор из n попарно несравнимых по модулю n целых чисел. Обычно в качестве полной системы вычетов по модулю n берутся наименьшие неотрицательные вычеты 0, 1, ..., $n-1$

или абсолютно наименьшие вычеты, состоящие из чисел $0, ,\pm 1, \ \pm 2, \dots, \pm\frac{n-1}{2}$ в случае нечётного n и чисел $0, \ ,\pm 1, \ \pm 2, \dots, \pm\frac{n}{2} - 1, \ \pm\frac{n}{2}$ в случае чётного n.

Теорема. Если r – остаток при делении a на b, то $НОД(a, b) = НОД(r, b)$.

На приведенном утверждении основывается алгоритм Евклида.

Признаки делимости числа $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$

Если …	то a делится на …
a_0 делится на 2	**2**
число $\overline{a_1 a_0}$ делится на 4 или 25	**4 или 25 соответственно**
число $\overline{a_2 a_1 a_0}$ делится на 8	**8**
a_0 равно 0 или 5	**5**
a_0 равно 0	**10**
сумма цифр числа делится на 3 или на 9	**3 или 9 соответственно**
знакочередующаяся сумма цифр делится на 11	**11**
сумма двузначных граней делится на 11	
знакочередующаяся сумма трехзначных граней делится на 7, 11 или 13 соответственно	**7, 11 или 13 соответственно**

Практика:

1. Найти остаток от деления числа 2^{1000} на 7.

2. Найти остаток от деления числа 2012^{2010} на 11.

3. Докажите, что число $2002^{2001} + 91^{2002} \cdot 2000^{1999}$ делится на 23 без остатка.

4. Найти остатки от деления на 3 чисел вида $2n^2 + 1$ для всех натуральных n.

5. Найти все простые p, для которых число $2p^2 + 1$ простое.

6. Решить в натуральных числах уравнение $2002^{20010} + 2000^{2002} = n^2$.

7. При каких натуральных n число $3^n - 1$ делится на 13?

8. Найдите все пятизначные числа вида $\overline{64X5Y}$ делящиеся на 36.

9. Найдите все целые положительные числа x и y, что четырехзначное число $\overline{1x9y}$– есть точный квадрат числа r, делящегося на 6.

10. Припишите к числу 19901990 сзади три цифры так, чтобы полученное число делилось на 7, 8 и 9.

11. Найдите все целые n, при которых числа $n - 2$, $n + 12$, $n + 26$ являются простыми.

12. Являются ли числа 7, 11, 13 делителями числа 5 159 539?

13. При каких натуральных n, k, m верно равенство $3^n + 4^k = 5^m$.

14. При каких целых n, k верно равенство $1 + 2^k + 2^{2k+1} = n^2$.

15. (Всероссийская олимпиада 2001г., II тур, 8.4) Натуральное число состоит из 1980 единиц, 1983 двоек, остальные цифры нули – нули. Может ли это число быть точным кубом?

16. (Всероссийская олимпиада 2005г., II тур, 9.4) Сколько знаков должно содержать число N = 1313…13, чтобы оно делилось на 63?

17. (Всероссийская олимпиада 1994г.) Найдите все простые числа, каждое из которых равно сумме и разности двух простых чисел.

18. Найдите все простые p, при которых числа $4p^2+1$ и $6p^2+1$ являются простыми.

19. Найдите все двузначные натуральные числа, у которых цифра единиц равна количеству однозначных натуральных делителей, а цифра десятков – количеству двузначных натуральных делителей.

20. (Московская математическая олимпиада, 1964) Известно, что при любом целом $K \neq 27$ число $a - K^3$ делится без остатка на 27 – K. Найдите a.

21. (III Всероссийская олимпиада 1963г.) Натуральные числа a и b взаимно просты. Докажите, что наибольший общий делитель чисел $a+b$ и a^2+b^2 равен 1 или 2.

22. (IV Всероссийская олимпиада 1964г.) Найдите все нечетные натуральные n, для которых $(n-1)!$ не делится на n^2.

23. (Всероссийская олимпиада 1996г., 9.3) Пусть a, b и c – попарно взаимно простые натуральные числа. Найдите все возможные значения $\frac{(a+b)(a+c)(b+c)}{abc}$, если известно, что это число целое.

24. Последовательность натуральных чисел a_i такова, что $НОД(a_i, \quad a_j) = НОД(i, \quad j)$ для всех $i \neq j$. Докажите, что $a_i = i$ для всех $i \in N$.

25. (Всероссийская олимпиада, 2005-2006, 10.2) Сумма кубов трех последовательных натуральных чисел оказалась кубом натурального числа. Докажите, что среднее из этих трех чисел делится на 4.

26. (Всероссийская олимпиада, 2004-2005, 10.1) Найдите наименьшее натуральное число не представимое в виде $\frac{2^a-2^b}{2^c-2^d}$, где a, b, c, d – натуральные числа.

27. (Всероссийская олимпиада, 2004-2005, 10.7) Натуральные числа x и y таковы, что $2x^2-1=y^{15}$. Докажите, что если $x > 1$, то x делится на 5.

Тема 6. Принцип “крайнего” в математических задачах

Теория:

При решении задач часто бывает полезно рассматривать объекты, случаи, ситуации, являющиеся в некотором смысле “крайними”. Правило «крайнего» может быть кратко выражено словами: «Рассмотрите крайнее!». Правило рекомендует рассмотреть объект, обладающий какими-либо «крайними» или как говорят в математике, экстремальными свойствами. Если в задаче идет речь о множестве точек на прямой то, по правилу «крайнего», необходимо рассмотреть самую крайнюю точку множества. Если в задаче фигурирует некоторый набор чисел, то правило «крайнего» рекомендует рассмотреть наибольшее или наименьшее из этих чисел. Рассмотрим применение этого подхода на некоторых примерах. Также характерным началом рассуждений по принципу “крайнего” могут являться: “предположим, что условие неверно, и рассмотрим многочлен минимальной степени, не удовлетворяющий условиям”, “среди всех подмножеств данного конечного множества чисел выберем подмножество с наибольшей суммой” и т.д.

Практика:

1. На полях бесконечной шахматной доски записаны натуральные числа так, что каждое число равно среднему арифметическому четырех соседних чисел – верхнего, нижнего, правого и левого. Определите разность наибольшего и наименьшего из этих чисел.

2. На квадратной шахматной доске размером $n \times n$ расставлены ладьи с соблюдением следующего условия: если некоторое поле свободно, то общее количество ладей, стоящих на одной с этим полем горизонтали или на одной с ним вертикали, не менее n. Докажите, что на доске находится не менее чем $\frac{n^2}{2}$ ладей.

3. Из натуральных чисел от 1 до 200 произвольно выбрали 101 число. Докажите, что среди выбранных чисел обязательно найдутся два, одно из которых делится на другое.

Тема 7. Нестандартные планиметрические задачи

1. Теорема Фалеса
   1.1. Две пары параллельных прямых, отсекающие на одной секущей равные отрезки, отсекают на любой другой секущей также равные отрезки.
   1.2. Обобщённая теорема Фалеса. Параллельные прямые отсекают на секущих пропорциональные отрезки: $\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_3A_2}{B_3B_2} = \frac{A_1A_3}{B_1B_3}$.
   1.3. Обратная теорема Фалеса. Если прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной и на другой стороне угла равные (или пропорциональные) между собой отрезки, начиная от вершины, то такие прямые параллельны.
2. Подобие плоских фигур.

2.1. Две фигуры F_1 и F_2 называются подобными, если между их точками можно установить взаимно однозначное соответствие, при котором отношение расстояний между любыми парами соответствующих точек равно одной и той же постоянной k. Постоянная k называется коэффициентом подобия.

2.2. В двух подобных фигурах любые соответствующие углы равны.

2.3. Площади подобных фигур пропорциональны квадратам их коэффициентов подобия.

2.4. Два многоугольника подобны, если они имеют равные углы и их соответствующие стороны пропорциональны.

2.5. Признаки подобия треугольников.

Для подобных треугольников необходимым и достаточным является каждый из следующих признаков:

2.5.1. стороны одного пропорциональны сторонам другого;

2.5.2. два угла одного равны двум углам другого;

2.5.3. две стороны одного пропорциональны двум сторонам другого, а углы между этими сторонами равны

2.6. Прямоугольные треугольники подобны, если гипотенуза и катет одного треугольника пропорциональны гипотенузе и катету другого.

Практика:

1. (Московская математическая олимпиада, 1945) Сторона AD параллелограмма $ABCD$ разделена на n равных частей. Первая точка деления P соединена с вершиной B. Доказать, что прямая BP отсекает на диагонали AC часть AQ, которая равна $\frac{1}{n+1}$части диагонали $AQ = \frac{AC}{n+1}$.

2. (Московская математическая олимпиада, 1989) Вершины A, B, C треугольника ABC соединены отрезками с точками A_1, B_1, C_1, лежащими на противоположных сторонах треугольника. Доказать, что середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1 не лежат на одной прямой.

3. На плоскости даны две прямые и точка M. Найдите на одной из прямых точку X такую, что отрезок MX делится другой прямой пополам.

4. Через точку на стороне четырёхугольника проведена прямая, параллельная диагонали, до пересечения с соседней стороной четырёхугольника. Через полученную точку проведена прямая, параллельная другой диагонали, и т.д. Докажите, что пятая точка, полученная таким способом, совпадет с исходной.

5. Дан угол и точка внутри него. С помощью циркуля и линейки проведите через эту точку прямую, отрезок которой, заключённый внутри данного угла, делился бы данной точкой в заданном отношении.

6. Старинный замок был обнесён треугольной стеной. Каждая сторона стены была поделена на три равные части, и в этих точках, а также в вершинах были построены башни. Всего вдоль стены было 9 башен: $A, E, F, B, K, L, C, M, N$. Со временем все стены и башни, кроме башен E, K, M, разрушились. Как по оставшимся башням определить, где находились башни A, B, C, если известно, что башни A, B, C стояли в вершинах?

Тема 8. Векторно-координатный метод решения задач

Теория:

Векторно-координатный метод – это математический приём решения задач и доказательства теорем, при котором геометрические отношения формулируются в векторно-координатных терминах, и дальнейшие рассуждения проводятся с использованием векторно-координатных понятий и их свойств.

Для решения задач элементарной геометрии с помощью векторов необходимо, прежде всего, научиться «переводить» условие геометрической задачи на «векторный» язык. После такого перевода осуществляются алгебраические вычисления с векторами, а затем полученное снова «переводится» на «геометрический» язык. В этом и состоит сущность векторного метода решения геометрических задач.

Что требуется доказать (на геометрическом языке)	Что достаточно доказать (на векторном языке)
$a \parallel b$	$\overline{AB} = k\overline{CD}$, где $[AB] \subset a, [CD] \subset b, k$ –число; в зависимости от выбора $[AB]$ и $[CD]$ возникают различные векторные соотношения, среди которых выбираются подходящие.
$A \in a, B \in a, c \in a$ (три точки принадлежат одной прямой)	Установить справедливость одного из следующих равенств: $\overline{AB} = k\overline{BC}$, или $\overline{AC} = k\overline{BC}$, или $\overline{AC} = k\overline{AB}$, где $k \neq 0$ или доказать равенство: $\overline{QC} = p\overline{QA} + q\overline{QB}$, где $p + q = 1$ и Q – произвольная точка, или доказать равенство $\alpha \cdot \overline{QA} + \beta \cdot \overline{QB} + \gamma\overline{QC} = \overline{0}$, где $\alpha + \beta + \gamma = 0$, Q– произвольная точка.
$C \in [AB]$, $\lvert AB\rvert : \lvert CB\rvert = m : n$ (деление отрезка в данном отношении)	$\overline{AC} = \frac{m}{n}\overline{CB}$ или $\overline{QC} = \frac{n}{n+m}\overline{QA} + \frac{m}{n+m}\overline{QB}$ для некоторой точки Q.
$a \perp b$	$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0$, где $A, B \in a, C, D \in b$
Лучи AB и CD одинаково направлены	$\overline{AB} = \lambda \cdot \overline{CD}$, $\lambda > 0$, или $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \lvert\overline{AB}\rvert \cdot \lvert\overline{CD}\rvert$, или $\lvert\overline{AB} + \overline{CD}\rvert = \lvert\overline{AB}\rvert + \lvert\overline{CD}\rvert$
Четырёхугольник $ABCD$ параллелограмм	$\overline{AB} = \overline{DC}$ или $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD}$

Что требуется доказать (на геометрическом языке)	Что достаточно доказать (на векторном языке)
Вычислить длину отрезка	– выбрать два неколлинеарных базисных вектора (или три некомпланарных), у которых известны длины и величина угла между ними; – разложить по ним вектор, длина которого вычисляется; – найти скалярный квадрат этого вектора, используя формулу $\overline{a}^2 = a^2$.
Вычислить величину угла	– выбрать два неколлинеарных базисных вектора, для которых известны отношение длин и углы между ними; – выбрать векторы, задающие искомый угол, и разложить их по базисным векторам; – вычислить $cos(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\lvert\bar{a}\rvert\cdot\lvert\bar{b}\rvert}$.

Практика:

Задача № 1. Точка C – середина отрезка AB, а O – произвольная точка на плоскости. Доказать, что $\overrightarrow{OC} = 1/2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.

Задача № 2. Доказать, что прямая, проведенная через середины оснований трапеции, проходит через точку пересечения продолжений боковых сторон.

Задача № 3. Дан произвольный треугольник ABC. Докажите, что существует треугольник, стороны которого соответственно параллельны и равны медианам треугольника ABC.

Тема 9. Элементы теории графов в олимпиадных задачах

Теория:

🕮***Граф** (от греч. γράφω – пишу) – множество V вершин и набор E неупорядоченных и упорядоченных пар вершин. Неупорядоченная пара вершин называется ребром, упорядоченная дугой. Граф, содержащий только ребра, называется неориентированным; граф, содержащий только дуги, называется ориентированным.*

Каждый граф можно представить в евклидовом пространстве множеством точек, соответствующих вершинам, некоторые из которых соединены линиями, соответствующими ребрам (или дугам).

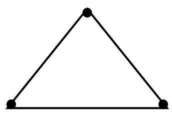
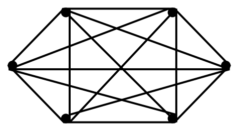
🕮*Число ребер, исходящих из вершины графа, называется **степенью** этой вершины.*

В повседневной жизни моделью графа можно считать карту автомобильных или железных дорог, электросхемы, чертежи многоугольников и т.д. Другие примеры графов – кристаллическая решетка, лабиринты, компьютерная сеть (да и рыболовная), генеалогическое дерево.

💻В информатике по способу установления связей между данными различают реляционную, иерархическую и сетевую модели. Иерархическая и сетевая модели предполагают наличие связей между данными, имеющими какой-либо общий признак. В иерархической модели такие связи могут быть отражены в виде дерева-графа, где возможны только односторонние связи от старших вершин к младшим. В сетевой модели, по крайней мере теоретически, возможны связи между все вершинами графа. Использование иерархической и сетевой моделей ускоряют доступ к информации в базе данных, правда значительно увеличивая требования к дисковой и основной памяти ЭВМ.

Первая статья о графах была опубликована в 1736 г. знаменитым швейцарским ученым (математиком, механиком и физиком) Леонардом Эйлером (1708-1783). Леонард Эйлер более 30 лет проработал в Петербургской Академии. Первые задачи теории графов были связаны с решением математических развлекательных задач и головоломок. Так статья Эйлера начиналась с разбора широко известной теперь задачи о кенигсбергских мостах (будет рассмотрена ниже), развитие которой привело к циклу задач об обходах графов. Решение задачи о перевозках привело к созданию эффективных методов решения транспортных задач.

🕮 Граф называется **полным**, если каждые две различные вершины его соединены одним и только одним ребром.

🕮 ***Путем*** *от А до В в графе называется такая последовательность ребер, ведущая от А к В, в которой каждые два соседних ребра имеют общую вершину и никакое ребро не встречается более одного раза.*

🕮 *Путь от А до В называется* ***простым****, если он не проходит ни через одну вершину графа более одного раза.*

🕮 *Две вершины А и В графа называются* ***связными****, если в графе существует путь, связывающий их.*

🕮 *Граф называется* ***связным****, если каждые две вершины его связные.*

🕮 ***Циклом*** *называется путь, в котором совпадают его начальная и конечная вершины.*

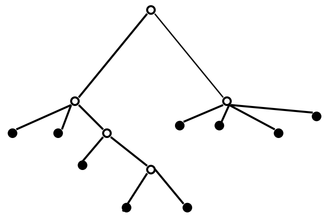
🕮 ***Простым циклом*** *в графе называется цикл, не проходящий ни через одну из вершин графа более одного раза.*

✍ ***Теорема.*** *Связный граф представляет собой простой цикл тогда и только тогда, когда каждая вершина его имеет степень 2.*

Верна и обратная теорема.

📖 ***Длиной пути (цикла)*** *называется число ребер этого пути (цикла).*

📖 ***Деревом*** *называется всякий связный граф, не имеющий циклов.*



📖 *Вершина дерева, степень которой равна* 1*, называется* ***висячей вершиной*****.**

✍ **Теорема.** *Дерево с* n *вершинами имеет* $n– 1$ *ребро.*

Для каждой пары вершин дерева существует единственный соединяющий их путь.

Рассмотрим несколько конкретных примеров использования графов.

Практика:

1. Нарисуйте полный граф с n вершинами, если n = 2, 4, 5.
2. Сколько ребер выходят из одной вершины полного графа с n вершинами, если n = 4, 5, k.
3. Изобразите, если возможно, полный граф с k ребрами (k = 3, 6, 9).
4. Сколько ребер в полном графе с n вершинами?
5. Какое максимальное (минимальное) число висячих вершин может иметь дерево обладающее 6 вершинами? Сделайте рисунки таких деревьев. Какое максимальное (минимальное) число висячих вершин может иметь дерево обладающее n вершинами?
6. Постройте, если возможно, дерево, имеющее 7 вершин и 6 ребер, 10 вершин и 8 ребер.
7. Сколько ребер нужно удалить из связного графа, имеющего k ребер и n вершин, чтобы получить дерево, содержащее все вершины этого графа?
8. Постройте граф, из которого нельзя выделить дерево, содержащее все его вершины.

9. В шахматном турнире 6 участников: А, Б, В, Г и Д. Соревнование проходит по круговой системе. Некоторые игры уже проведены: Б сыграл с А и Д, В – с А, Г и Д, Г – с В и А, А – с Б, Г и В, Д – с Б и В. Сколько партий было проведено и сколько осталось сыграть?

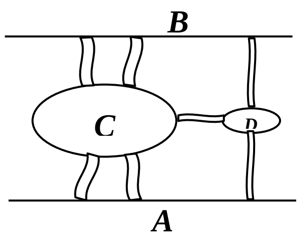
10. Каждый из четырех болельщиков A, B, C и D болеет только за одну из четырех команд Спартак, Динамо, Локомотив и Зенит. A не болеет за Спартак и Зенит, B не болеет

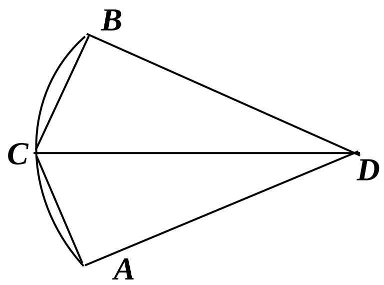
за Динамо и Зенит, C не болеет за Спартак, D болеет за Спартак. Определите за какую команду болеет каждый болельщик.

11. Можно ли организовать шахматный турнир по швейцарской системе среди 10 участников так, чтобы каждый провел по 5 встреч?

12. (XXVII Всероссийская олимпиада, 2000-2001, III этап, 8.8) Улитка движется по поверхности куба, переползая от вершины к вершине по ребру или по диагонали грани. Найдите протяженность самого длинного пути из одной вершины куба в противоположную (наиболее удаленную) вершину, если запрещается пересекать свой путь и проходить через одну вершину дважды.

13. В XVIII веке город Кенигсберг (Калининград) был расположен на берегах реки и двух островах. Различные части города были соединены семью мостами, как показано на рисунке. Можно ли обойти все эти мосты так, чтобы побывать на каждом из них ровно один раз? (Ответ: нельзя)





Утверждения Л. Эйлера:

1). Если существует замкнутый путь, проходящий по всем ребрам графа, причем по каждому ребру только один раз, то степени всех вершин графа четные.

2). Если существует аналогичный незамкнутый путь, то степени начала и конца пути нечетные, а остальных вершин – четные.

Верны и обратные утверждения.

Пусть граф связный. Тогда путь, проходящий по всем ребрам графа, причем по каждому ребру только один раз, существует лишь в следующих двух случаях:

1). Когда степень каждой вершины четная (путь замкнут).

2). Когда граф имеет только две вершины A и B с нечетной степенью (путь не замкнут и имеет своими концами вершины A и B.

14. а) Докажите, что среди любых шести человек найдутся или трое попарно знакомых между собой, или трое попарно не знакомых.

б) 17 математиков из разных стран переписываются друг с другом. Каждые двое переписываются на одном из трех языков: английском, французском или русском. Докажите, что найдутся три математика, которые переписываются на одном и том же языке.

15. Среди девяти мушкетеров некоторые поссорились и вызвали друг друга на дуэль. Докажите, что если среди них нет трех, которые должны драться друг с другом, то среди мушкетеров найдутся четверо друзей.

16. (Санкт-Петербургская олимпиада, 2003 г., № 91) В государстве 2003 города. Они соединены дорогами с двусторонним движением так, что между любыми двумя городами есть единственный путь, причем он проходит не более чем по 8 дорогам. Город называется захолустным, если из него выходят не более 8 дорог. Докажите, что найдется город, соединенный как минимум с 8 захолустными городами.

17. (XXX Всероссийская олимпиада, 2003-2004, IV этап, 11.4) В некотором государстве было 2004 города, соединенных дорогами так, что из любого города можно было добраться до любого другого. Известно, что запретив проезд по любой из дорог, по-прежнему из любого города можно было добраться до любого другого. Министр транспорта и министр внутренних дел по очереди вводят на дорогах пока есть возможность одностороннее движение (на одной дороге за ход), причем министр, после хода которого из какого-либо города стало невозможно добраться до какого-либо другого, немедленно уходит в отставку. Может ли кто-нибудь из министров добиться отставки другого независимо от его игры?

18. (Всероссийская олимпиада 1965) Турист, приехавший в Москву на поезде, весь день бродил по городу пешком. Поужинав на одной из площадей, он решил вернуться на вокзал и при этом идти только по тем улицам, по которым он шел до этого нечетное число раз. Доказать, что он всегда сможет это сделать.

19. Дана пятиугольная призма с основаниями $A_1A_2A_3A_4A_5$ и $B_1B_2B_3B_4B_5$. Все ребра оснований и все отрезки A_iB_j (i, j =1, 2, 3, 4, 5) окрашены либо в красный, либо в синий цвет так, что в каждом треугольнике с вершинами в вершинах призмы, стороны которого окрашены, имеются стороны различного цвета. Докажите, что все десять ребер оснований окрашены одинаково.

20. (XXXI Всероссийская олимпиада, 2005, IV этап, 10.4, 11.3) Даны $N \geq 3$ точек, занумерованных 1, 2, …, N. Каждые две соединены стрелкой от меньшего к большему. Раскраска всех стрелок в красный и синий цвет называется *однотонной*, если нет двух таких точек A и B, что от A до B можно добраться и только по красным стрелкам, и только по синим. Найдите количество однотонных раскрасок.

Тема 10. Тригонометрия в олимпиадных задачах

Теория:

I. Основные тригонометрические тождества

1. $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$
2. $tg\alpha = \frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha}$
3. $ctg\alpha = \frac{cos\,\alpha}{sin\,\alpha}$
4. $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$
5. $tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha}$
6. $ctg^2\alpha + 1 = \frac{1}{sin^2\alpha}$
7. $sin(-\alpha) = -sin\,\alpha$
8. $cos(-\alpha) = cos\,\alpha$
9. $tg(-\alpha) = -tg\alpha$
10. $ctg(-\alpha) = -ctg\alpha$
11. $sin(\alpha + \beta) = sin\,\alpha \cdot cos\,\beta + cos\,\alpha \cdot sin\,\beta$
12. $sin(\alpha - \beta) = sin\,\alpha \cdot cos\,\beta - cos\,\alpha \cdot sin\,\beta$
13. $cos(\alpha + \beta) = cos\,\alpha \cdot cos\,\beta - sin\,\alpha \cdot sin\,\beta$
14. $cos(\alpha - \beta) = cos\,\alpha \cdot cos\,\beta + sin\,\alpha \cdot sin\,\beta$
15. $tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta}$
16. $tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha \cdot tg\beta}$
17. $sin(2\alpha) = 2\,sin\,\alpha \cdot cos\,\alpha$
18. $cos(2\alpha) = cos^2\alpha - sin^2\alpha = 2\,cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\,sin^2\alpha$
19. $tg(2\alpha) = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$
20. $\left|sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 - cos\,\alpha}{2}}$
21. $\left|cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 + cos\,\alpha}{2}}$
22. $\left|tg\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 - cos\,\alpha}{1 + cos\,\alpha}}$
23. $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{sin\,\alpha}{1 + cos\,\alpha} = \frac{1 - cos\,\alpha}{sin\,\alpha}$
24. $sin\,\alpha + sin\,\beta = 2\,sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
25. $sin\,\alpha - sin\,\beta = 2\,sin\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot cos\frac{\alpha+\beta}{2}$
26. $cos\,\alpha + cos\,\beta = 2\,cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
27. $cos\,\alpha - cos\,\beta = -2\,sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot sin\frac{\alpha-\beta}{2}$
28. $sin\,\alpha \cdot sin\,\beta = \frac{1}{2}(cos(\alpha - \beta) - cos(\alpha + \beta))$
29. $cos\,\alpha \cdot cos\,\beta = \frac{1}{2}(cos(\alpha - \beta) + cos(\alpha + \beta))$
30. $sin\,\alpha \cdot cos\,\beta = \frac{1}{2}(sin(\alpha + \beta) + sin(\alpha - \beta))$

II. Определения обратных тригонометрических функций

1. Арксинусом числа a называют такое число x из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ синус которого равен a.

$arcsin\,a = x$, где $x \in \left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$, $sin\,x = a,\ a \in [-1,\ 1]$.

2. Арккосинусом числа a называют такое число x из отрезка $[0,\ \pi]$ косинус которого равен a.

$arccos\,a = x$, где $x \in [0,\ \pi]$, $cos\,x = a$, $a \in [-1,\ 1]$.

3. Арктангенсом числа a называют такое число x из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ тангенс которого равен a.

$arctga = x$, где $x \in \left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$, $tgx = a$.

4. Арккотангенсом числа a называют такое число x из промежутка $(0,\ \ \pi)$ котангенс которого равен a.

$arcctga = x$, где $x \in (0,\ \pi)$, $ctgx = a$.

III. Формулы корней простейших тригонометрических уравнений

1. $sin\,t = a,$	$t = (-1)^n\,arcsin\,a + \pi n$, где $n \in Z$, $a \in [-1,\ 1]$.
2. $cos\,t = a,$	$t = \pm\,arccos\,a + 2\pi n$, где $n \in Z$, $a \in [-1,\ 1]$.
3. $tg\ t = a,$	$t = arctga + \pi n$, где $n \in Z$.
4. $ctg\ t = a,$	$t = arcctga + \pi n$, где $n \in Z$.

IV. $sin\,x \le x$, для любого $x \ge 0$. Причем, $sin\,x = x$, только если $x = 0$.

V. Некоторые тождества для обратных тригонометрических функций.

1. $sin(arcsin\,x) = x$, где $x \in [-1;\ 1]$.
2. $cos(arccos\,x) = x$, где $x \in [-1;\ 1]$.
3. $tg(\mathrm{arc}tgx) = x$.
4. $ctg(arcctgx) = x$.
5. $arcsin(sin\,x) = x$, где $x \in \left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$.
6. $arccos(cos\,x) = x$, где $x \in [0,\ \pi]$.
7. $arc\,t\,g(tgx) = x$, где $x \in \left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$.
8. $arc\,c\,tg(ctgx) = x$, где $x \in (0,\ \pi)$.
9. $arctgx + arcctgx = \frac{\pi}{2}$.
10. $arcsin\,x + arccos\,x = \frac{\pi}{2}$.
11. $arccos\,x = \begin{cases} arcsin\sqrt{1-x^2}, \text{ если } 0 \le x \le 1; \\ \pi - arcsin\sqrt{1-x^2}, \text{ если } -1 \le x < 0. \end{cases}$
12. $arcsin\,x = \begin{cases} arccos\sqrt{1-x^2}, \text{ если } 0 \le x \le 1; \\ -arccos\sqrt{1-x^2}, \text{ если } -1 \le x < 0. \end{cases}$
13. $cos(arcsin\,x) = \sqrt{1-x^2}$.
14. $sin(arccos\,x) = \sqrt{1-x^2}$.
15. $tg(arcc\,t\,gx) = \frac{1}{x}$.
16. $ctg(arc\,t\,gx) = \frac{1}{x}$.
17. $cos(arc\,t\,gx) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
18. $sin(arc\,t\,gx) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
19. $cos(arc\,c\,tgx) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
20. $sin(arc\,c\,tgx) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Практика:

1. Найдите значение выражения $\frac{|tg(cos\,\pi)|}{tg(cos\,\pi)} + \frac{2|cos(sin\,5)|}{cos(sin\,5)} + \frac{4\cdot|ctg(cos\,4)|}{ctg(cos\,4)}$.

2. Вычислите: а) $\frac{1}{sin\,10°} - \frac{\sqrt{3}}{cos\,10°}$;

б) $(1+tg1°)(1+tg2°)(1+tg3°)\dots(1+tg44°)$;

в) $cos\frac{\pi}{33}\cdot cos\frac{2\pi}{33}\cdot cos\frac{4\pi}{33}\cdot cos\frac{8\pi}{33}\cdot cos\frac{16\pi}{33}$.

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2011x + 2010y = 2010\,sin\,y + 2011\,sin\,x; \\ (x-y+1)u^2 - 4020u + (x+y+1)v^2 + 2010^2 + \sqrt[2012]{y} = 4018v - 2009^2\,cos\,y + \sqrt[2010]{x}. \end{cases}$$

4. Решите уравнение $\left(sin\,x + \sqrt{sin^2 x + 1}\right)\left(cos\,x + \sqrt{cos^2 x + 1}\right) = 1$.

5. Чему равна сумма arctg x + arcctg x.

6. Вычислите: а) $arcsin(sin\,4)$; б) $sin\left(2arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$;

в) $arctg\frac{1}{3} + arctg\frac{1}{5} + arctg\frac{1}{7} + arctg\frac{1}{8}$.

7. Постройте график функции $y = arccos(cos\,x)$.

8. Определите количество различных целочисленных значений параметра p, при которых система уравнений $\begin{cases} y = 5\,sin\left|arcsin\frac{x}{5}\right|, \\ 4y + p = 4x^2 \end{cases}$ имеет ровно два различных решения.

9. Найти длину промежутка, который образует множество всех решений неравенства $arcsin(4x-3) \le arcsin(3-5x)$.

10. Что больше: $\frac{sin\,1^0}{sin\,2^0}$ или $\frac{sin\,3^0}{sin\,4^0}$?

11. Докажите, что при $x \in \left(0, \quad \frac{\pi}{2}\right)$; выполняется неравенство $0 < \frac{1}{sin^2 x} - \frac{1}{x^2} < 1$.

12. (Всероссийская олимпиада, II-й этап, 2009-2010, 11.4) Найти все пары чисел (x, y), удовлетворяющих условию

$\sqrt{2-|y|} \cdot (5\,sin^2 x - 6\,sin\,x \cdot cos\,x - 9\,cos^2 x + 3\sqrt[3]{33}) = (arcsin\,x)^2 + (arccos\,x)^2 - \frac{5}{4}\pi^2$.

13. (Всероссийская олимпиада, II-й этап, 2013-2014, 11.1) Найдите наибольшее значение выражения $x + y$, если $(2sinx-1)(2cosy-\sqrt{3}) = 0$ $x \in \left[0;\ \frac{3\pi}{2}\right]$, $y \in [\pi;\ 2\pi]$.

14. (Всероссийская олимпиада, II-й этап, 2012-2013, 11.2) Найдите область значений функции $f(x) = 1 - sin^6 x + 11\,sin\,x - cos^6 x + 12\,cos\,x - 3\,sin^2 x \cdot cos^2 x$.

15. (Всероссийская олимпиада, II-й этап, 2005-2006, 10.1) Синус и косинус некоторого угла оказались различными корнями квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$. Докажите, что $b^2 = a^2 + 2ac$.

16. (Всероссийская олимпиада, II-й этап, 2005-2006, 11.1) Найдите какую-нибудь функцию $f(x)$, отличную от константы, такую, что она не принимает отрицательных значений и для любого α выполняется неравенство $f(sin\,\alpha) + f(cos\,\alpha) \ge 4f(sin\,\alpha \cdot cos\,\alpha)$

17. Найдите наибольшее значение выражения $sin\,x\,sin\,y\,sin\,z + cos\,x\,cos\,y\,cos\,z$.

18. (Всероссийская олимпиада, 1980) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} sin\,x + 2\,sin(x+y+z) = 0, \\ sin\,y + 3\,sin(x+y+z) = 0, \\ sin\,z + 4\,sin(x+y+z) = 0. \end{cases}$$

19. (Всероссийская олимпиада, III-й этап, 2001-02, 10.1, 11.1) Решите неравенство $sin\,x \le tgx \le ctgx \le cos\,x$.

20. (Всероссийская олимпиада, III-й этап, 2005-06, 11.5) Числа $sin\,x$, $cos\,x$ и $tg\,x$ являются членами некоторой бесконечной в обе стороны геометрической прогрессии. Докажите, что $ctg\,x$ также входит в эту прогрессию.

21. (Всероссийская олимпиада, III-й этап, 2006-07, 11.5) Докажите, что при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ выполнено неравенство $(tgx)^{sin\,x} + (ctgx)^{cos\,x} \ge 2$.

22. (Всероссийская олимпиада, III-й этап, 2004-05, 11.2) Известно, что $sin\,x + cos\,2\,x$ и $cos\,x + sin\,2\,x$ – ненулевые рациональные числа. Докажите, что $\sin x$ и $\cos x$ рациональные числа.

23. (Всероссийская олимпиада, 11 класс, 1981) Числа a и b таковы, что неравенство $a \cdot cos\, x + b \cdot cos(\,3x) > 1$ не имеет решений. Доказать, что $|b| \leq 1$.

24. (Всероссийская олимпиада, 11 класс, 1982) Числа a, b, c лежат в промежутке $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ и удовлетворяют неравенствам $cos\, a = a,\ sincos\, b = b,\ cossin\, c = c$. Расположите эти числа в порядке возрастания.

25. (Всероссийская олимпиада, IV-й этап, 2005-06) Докажите, что для каждого x, такого, что $sin\, x \neq 0$, найдется такое натуральное n, что $|sin(nx)| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

26. (Всероссийская олимпиада, IV-й этап, 2004-05) Найдите все пары чисел $x,\ y \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$, удовлетворяющие равенству $sin\, x + sin\, y = sin(\,xy)$.

Тема 11. Текущий контроль знаний

1. Докажите, что $x^4 + y^4 + z^2 + 1 \geq 2x(xy^2 - x + z + 1)$.

2. Найдите три наименьших простых числа, являющихся делителями выражения $2015^{2017} + 2017^{2016}$.

3. Докажите, что $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

4. На окружности с центром O расположены точки A и B. Точка P находится на меньшей из дуг AB, точка P_1 симметрична точке P относительно прямой AB. Прямая AP_1 пересекает данную окружность в точке B_1, а прямая BP_1 в точке A_1. Докажите, что точки P и B_1 симметричны относительно прямой OB, а точки P и A_1 симметричны относительно прямой OA.

5. Медианы AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке O. Найдите длину отрезка AO, если $BC = \sqrt{3}$ и точки A, B_1, C_1 и O лежат на одной окружности.

6. Известно, что $sin\, x + cos\, 2\, x$ и $cos\, x + sin\, 2\, x$ – ненулевые рациональные числа. Докажите, что $sin\, x$ и $cos\, x$ рациональные числа.

Тема 12. Анализ задач вузовских олимпиад

Тема 13. Разбор задач муниципального этапа Всероссийской олимпиады по математике

Тема 14. Решение типовых задач в соответствии с рекомендациями оргкомитета по проведению муниципального этапа Всероссийской олимпиады по математике

Тема 15. Окружность. Вписанные и описанные многоугольники

Теория:

1. Окружность. Круг. Вписанные и описанные многоугольники.

1.1. Окружностью называется множество всех точек плоскости, находящихся на данном расстоянии от некоторой данной точки плоскости. Точка называется центром окружности, расстояние – радиусом. Круг состоит из окружности и ее внутренних точек.

1.1.1. Длина окружности радиуса R: $l = 2\pi R$.

1.1.2. Длина дуги в $n°$ окружности радиуса R: $l = \frac{\pi R n}{180}$.

1.1.3. Площадь круга радиуса R: $S = \pi R^2$.

1.1.4. Площадь сектора в $n°$ круга радиуса R: $S = \frac{\pi R^2 n}{360}$

1.1.5. Центральный угол – угол, образованный двумя радиусами.

1.1.6. Вписанный угол – угол, образованный двумя хордами исходящими из одной точки окружности.

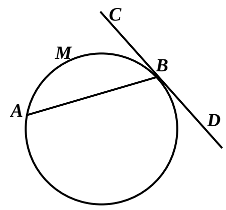
1.1.6.1.Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.

1.1.6.2.Вписанный угол равен половине центрального, опирающегося на ту же дугу.

1.1.6.3. Все вписанные углы, опирающиеся на данную дугу, равны между собой.

1.1.7. Прямая, имеющая с окружностью одну общую точку, называется касательной к окружности.

1.1.8. Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

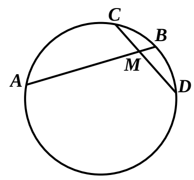


1.1.9. Угол, составленнй касательной и хордой, измеряется половиной дуги, заключенной внутри него ($\angle ABC = \frac{1}{2} \cup BMA$).

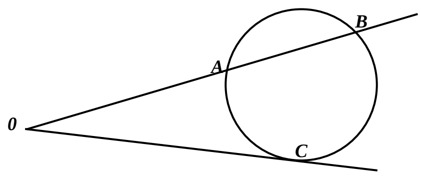
1.1.10. Хордой, называется отрезок, соединяющий две точки на окружности.

1.1.10.1. Диаметр, делящий хорду пополам, перпендикулярен этой хорде.

1.1.10.2. Равные хорды окружности равноудалены от ее центра, равноудаленные от центра окружности хорды равны.



1.1.10.3. Если через точку M, лежащую внутри окружности, проведены две хорды AB и CD, то произведения отрезков хорд равны: $AM \cdot MB = CM \cdot MD$



1.1.10.4. Если из точки M, лежащей вне окружности, проведены касательная MC и секущая MA, то произведение секущей на ее внешнюю часть равно квадрату касательной: $MC^2 = AM \cdot MB$.

1.2. Многоугольник, все вершины которого лежат на окружности, называется вписанным в окружность, а окружность описанной около многоугольника. Окружность, касающаяся всех сторон многоугольника, называется вписанной в многоугольник.

1.2.1. $R = \frac{a_n}{2\,sin\frac{180°}{n}}$, где R – радиус окружности, описанной около правильного многоугольника, a_n – сторона правильного n-угольника.

1.2.2. $r = \frac{a_n}{2tg\frac{180°}{n}}$, где r – радиус окружности, вписанной в правильный многоугольник, a_n – сторона правильного n-угольника.

1.2.3. Если около многоугольника можно описать окружность, то площадь многоугольника $S_n = pr$, где p – полупериметр многоугольника, r – радиус вписанной окружности.

1.2.4. Теорема Птолемея. В выпуклом четырехугольнике, вписанном в круг, произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон.

1.2.5. В четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы его противолежащих сторон равны.

1.2.6. Около четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда суммы его противолежащих углов равны 180°.

1.2.7. Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на середине гипотенузы.

1.2.8. Центр окружности, описанной около треугольника, лежит на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

1.2.9. Центр окружности, вписанной в треугольник, лежит на пересечении биссектрис треугольника.

1.2.10. Если в многоугольник можно вписать окружность, то её центр лежит на пересечении биссектрис углов многоугольника.

1.2.11. Если около многоугольник можно описать окружность, то её центр лежит на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

Практика:

1. Окружность с центром O вписана в треугольник ABC. Найдите сторону AC, если $AB = 8$, $BC = 7$, $\angle AOC = 150°$.

2. Угол правильного многоугольника $A_1A_2...A_n$ равен 135°, а диагональ A_1A_3 равна $14\sqrt{2}$. Найдите наибольшую диагональ этого многоугольника.

3. n равных окружностей, расположенных внутри окружности радиуса R, касаются между собой и данной окружности. Найдите радиус этих окружностей, если число n равно: 1) 3; 2) 4; 3) 6.

4. В круг радиуса R вписаны правильный треугольник и квадрат, имеющие общую вершину. Найдите площадь их пересечения.

5. В полукруг с радиусом R=1 вписана трапеция, основание которой диаметр круг, а остальные стороны равны. Найдите площадь трапеции, если ее периметр равен 5.

6. (ЗФТШ, 2010) Через точку A к окружности проведены две касательные AB и AC (B и C – точки касания) и секущая (AD, пересекающая окружность ещё в точке E ($AD > AE$). Хорда BD параллельна прямой AC. Прямая BE пересекает прямую AC в точке F. Найти AF, если $AB = a$.

7. (Всероссийская олимпиада, 2008/2009, муниципальный тур, 11.4) В квадрат $ABCD$ вписан круг. В каждом из углов ABC, BCD, CDA, DAB квадрата размещена система бесконечного числа кругов. Первый из кругов каждой системы касается круга, вписанного в квадрат, и сторон соответствующего угла, каждый следующий касается предыдущего и сторон соответствующего угла. Найдите отношение суммы площадей всех кругов, в том числе вписанного в квадрат, к площади квадрата.

8. (Всероссийская олимпиада, 2008/2009, муниципальный тур, 10.8) На плоскости расположено бесконечное множество L прямых, никакие две из которых не параллельны. Известно, что, как бы ни расположить на плоскости квадрат со стороной 1, он будет пересекаться хотя бы с одной прямой множества L. Докажите, что найдется квадрат со стороной 0,8, который пересекается не менее чем с тремя прямыми множества L.

9. (Всероссийская олимпиада, 2008/2009, муниципальный тур, 10.4) На окружности с центром O расположены точки A и B. Точка P находится на меньшей из дуг AB, точка P_1 симметрична точке P относительно прямой AB. Прямая AP_1 пересекает данную окружность в точке B_1, а прямая BP_1 в точке A_1. Докажите, что точки P и B_1 симметричны относительно прямой OB, а точки P и A_1 симметричны относительно прямой OA.

10. (Всероссийская олимпиада, 2004/2005, муниципальный тур, 9.4) Пусть P — ближайшая к вершине B точка пересечения биссектрисы угла B со вписанной окружностью треугольника ABC. Касательная к этой окружности, проведенная через P, пересекает стороны BC и BA в точках C_1 и A_1 соответственно. Докажите, что расстояние от точки A_1 до биссектрисы угла A равно расстоянию от точки C_1 до биссектрисы угла С.

11. (Всероссийская олимпиада, 2004/2005, муниципальный тур, 11.6) Пусть P — произвольная точка внутри остроугольного треугольника ABC с описанной окружностью

Ω. Прямые AP, BP и CP вторично пересекаются с Ω в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Обозначим через A_2, B_2 и C_2 проекции точки P на прямые BC, CA и AB соответственно. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ подобны.

Тема 16. Решение неравенств методом "рационализации"

Теория:

При использовании метода "рационализации" решение различных видов неравенств и их систем сводится к решению равносильных им рациональных неравенств или их систем. Переход осуществляется на основе свойств монотонности функций, изучаемых в школе.

№	Исходное выражение	Эквивалентное выражение (при сравнении исходного выражения с нулем)	Дополнительные условия	Примеры
1.	$\lvert a\rvert-\lvert b\rvert$	a^2-b^2	Нет	$\lvert 2x-5\rvert-\lvert 3x+7\rvert \le 0 \Leftrightarrow$ $(2x-5)^2-(3x+7)^2 \le 0$
2.	$\sqrt{a}-\sqrt{b}$	$a-b$	$a \ge 0,\ b \ge 0$	$\sqrt{2x-5}-\sqrt{3x+7}<0 \Leftrightarrow \begin{cases}(2x-5)-(3x+7)<0,\\ 2x-5\ge 0,\\ 3x+7\ge 0\end{cases}$
3.	$\sqrt{a}-\lvert b\rvert$	$a-b^2$	$a \ge 0$	$\sqrt{2x-5}-\lvert 3x+7\rvert<0 \Leftrightarrow \begin{cases}(2x-5)-(3x+7)^2<0,\\ 2x-5\ge 0\end{cases}$
4.	c^a-c^b	$(a-b)(c-1)$	$c>0$	$5^{2x-3}-5^{1-x^2}>0 \Leftrightarrow$ $((2x-3)-(1-x^2))(5-1)>0$
5.	$log_c a - log_c b$	$(a-b)(c-1)$	$a,\ b,\ c>0,$ $c\ne 1$	$\log_{x-2}(x^2-3x+2)-log_{x-2}(x-1)\ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases}((x^2-3x+2)-(x-1))(x-2-1)\ge 0,\\ x^2-3x+2>0,\\ x-1>0,\\ x-2>0,\\ x-2\ne 1\end{cases}$
6.	$log_c a$	$(a-1)(c-1)$	$a,\ c>0,$ $c\ne 1$	$\log_{x-2}(x^2-3x+2)\ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases}((x^2-3x+2)-1)(x-2-1)\ge 0,\\ x^2-3x+2>0,\\ x-2>0,\\ x-2\ne 1\end{cases}$
7.	$log_c a + log_c b$	$(ab-1)(c-1)$	$a,\ b,\ c>0,$ $c\ne 1$	$\log_{x-2}(3x+2)+\log_{x-2}(x-1)\ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases}((3x+2)\cdot(x-1)-1)(x-2-1)\ge 0,\\ 3x+2>0,\\ x-1>0,\\ x-2>0,\\ x-2\ne 1\end{cases}$
8.	$arcsin\, a - arcsin\, b$	$a-b$	$\lvert a\rvert\le 1,\ \lvert b\rvert \le 1$	$arcsin\, x-\frac{\pi}{6}\ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases}x-0{,}5\ge 0,\\ \lvert x\rvert\le 1\end{cases}$
9.	$arccos\, a - arccos\, b$	$b-a$	$\lvert a\rvert\le 1,\ \lvert b\rvert \le 1$	$arccos\, x-\frac{\pi}{6}\ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}-x\ge 0,\\ \lvert x\rvert\le 1\end{cases}$

Тема 17. Задания с параметрами

Теория:

Пример классификации способов выполнения заданий с параметрами

1. Выполнение заданий с параметрами аналогично соответствующим заданиям без параметров.

2. Функционально-графический способ решения.

3. Решение относительно параметра.

4. Оценка диапазона значений выражений.

5. Инвариант. Симметрия.

6. Анализ значений функции на концах отрезка.

7. Применение производной.

8. Другие приемы решения.

9. Учет дополнительных условий в заданиях с параметрами.

10. Комбинированные приёмы решения.

Тема 18. Нестандартные задачи на применение производной

Теория:

Свойства функции. Производная и ее применение

I. Определение производной.

Производной функции *f(x)* называется функция $f'(x)$, значение которой в точке x выражается формулой $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

II. Правила вычисления производной

1) $(u+v)' = u' + v'$;

2) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$, следствие из 2-го правила: $(c \cdot v)' = c \cdot v'$, где c = const;

3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$;

4) $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$;

5) $(f(g(x))') = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

III. Таблица производных

1) $c' = 0$;	6) $cos\ ' x = -sin\, x$;	11) $(ln\, x)' = \frac{1}{x}$;
2) $x' = 1$;	7) $tg' x = \frac{1}{cos^2 x}$;	12) $(log_a x)' = \frac{1}{x \cdot ln\, a}$;
3) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;	8) $ctg' x = -\frac{1}{sin^2 x}$;	13) $(arcsin\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\|x < 1\|$;

4) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$;

5) $sin\ 'x = cos\, x$;

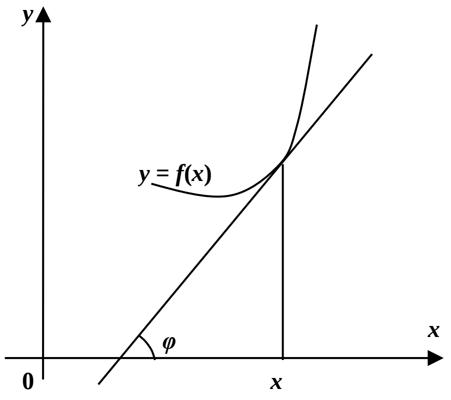
9) $(e^x)' = e^x$;

10) $(a^x)' = a^x \cdot ln\, a$;

14) $(arccos\, x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad |x < 1|$;

15) $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$.

IV. Геометрический смысл производной



1) Производная функции в точке – это тангенс угла наклона касательной данной функции в данной точке к положительному направлению оси абсцисс.

$f'(x_0) = tg\varphi = k$, где k – угловой коэффициент касательной.

2) Уравнение касательной к графику функции *y=f(x)* в точке с абсциссой x_0: $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

V. Механический (физический) смысл производной

Если путь, пройденный телом к моменту времени *t*, определяется функцией *y=f(t)*|, то скорость движения функции в момент времени *t* равна производной функции *f(t)*:

$$v(t) = f'(t),$$

а ускорение производной скорости: $a(t) = v'(t) = f'$.

VI. Приближенные вычисления с помощью производной

При малых Δ*x*, $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$.

I. Если дано правило соответствия, относящее каждому действительному числу *x* из множества *Dx* действительное число

$$y = f(x),$$

то *y* называется (числовой) **функцией**

$y = y(x) = f(x)$ аргумента *x*.

II. Функция *y*(*x*) имеет обратную функцию *x*(*y*), если из *y* = *y*(*x*) следует *x* = *x*(*y*).

III. Функция *f*(*x*) четна, если для любого$x \in D(f)$, выполняется равенство $f(-x) = f(x)$. Функция *f*(*x*) нечетна, если для любого $x \in D(f)$, выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси ординат. График нечетной функции симметричен относительно центра координатной плоскости.

IV. Функция *f(x)* является периодической с периодом T если для любого$x \in D(f)$, выполняется равенство $f(x+T) = f(x)$. Если T является периодом функции *f(x)*, то $T \cdot n$, где $n \in Z$ также является периодом функции *f(x)*.

V. Действительная функция $f(x)$ возрастает на интервале I, если для любых x_1 и x_2 из интервала I из $x_1 < x_2$ всегда следует $f(x_1) < f(x_2)$. Действительная функция $f(x)$ убывает на интервале I, если для любых x_1 и x_2 из интервала I из $x_1 < x_2$всегда следует $f(x_1) > f(x_2)$.

VI. Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке I и ее производная положительна (соответственно отрицательна) во внутренних точках этого промежутка, то функция $f(x)$ возрастает (соответственно убывает) на I.

Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке I и ее производная неотрицательна (соответственно неположительна) во внутренних точках этого промежутка и равна нулю лишь в конечном множестве точек, то функция $f(x)$ возрастает (соответственно убывает) на I.

VII. Критические точки функции $f(x)$ это внутренние точки области определения функции в которых производная равна нулю или не существует.

VIII. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, причем вблизи этой точки слева от x_0 производная функции $f(x)$ положительна, а справа от x_0 производная функции $f(x)$ отрицательна, то x_0 $-$ точка максимума функции $f(x)$.

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, причем вблизи этой точки слева от x_0 производная функции $f(x)$ отрицательна, а справа от x_0 производная функции $f(x)$ положительна, то x_0 $-$точка минимума функции $f(x)$.

Практика:

1. а) Решите неравенство: $ln(x-2) \geq x-3$.

б) Доказать, что $e^b \geq e^a + e^a(b-a)$ для любых действительных чисел a и b.

в) Решить систему уравнений: $\begin{cases} 2x - 2y = sin\, x - sin\, y, \\ x + 2y = 9 \end{cases}$.

2. Исследуйте функцию и постройте ее график $y = \frac{|x-1|}{x^2-1}$.
3. Найдите сумму $x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n$, а затем сумму $1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$.
4. Можно ли почленно дифференцировать неравенство?
5. При каких a функция $y = log_{\frac{1}{2}}(x-5) + log_{\frac{1}{2}}(a-2x)$ имеет минимум в точке с абсциссой, равной 6,5?

Тема 19. Нестандартные стереометрические задачи

Теория:

1. Перпендикулярность прямых и плоскостей

1.1. Перпендикулярность прямых.

Две прямые называются перпендикулярными, если угол между ними прямой.

Т. 1.1. Если две пересекающиеся прямые параллельны соответственно двум перпендикулярным прямым, то они тоже перпендикулярны.

1.2. Перпендикулярность прямой и плоскости

Прямая называется перпендикулярной плоскости, если она перпендикулярна любой прямой этой плоскости.

Т. 1.2.1 (Признак перпендикулярности прямой и плоскости) Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

Т.1.2.2 Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.

Т.1.2.3 Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая прямая перпендикулярна этой плоскости.

Т.1.2.4 (О трех перпендикулярах) Прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной перпендикулярно ее проекции, перпендикулярна и самой наклонной.

Т.1.2.5 (Обратная теореме о трех перпендикулярах) Если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции этой наклонной.

1.3. Перпендикулярность двух плоскостей

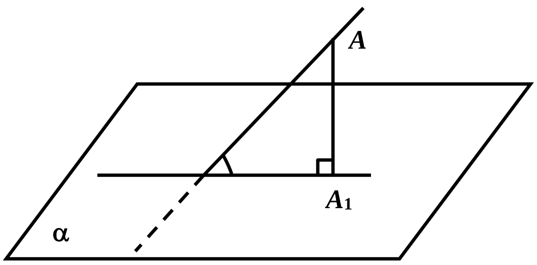
Две пересекающиеся плоскости называются перпендикулярными, если какая-либо плоскость, перпендикулярная прямой пересечения этих плоскостей, пересекает их по перпендикулярным прямым. (Две плоскости, образующие друг с другом прямой угол, называются *перпендикулярными*.)

2. Углы

2.1. Угол между прямыми.

Угол между скрещивающимися прямыми равен углу между пересекающимися прямыми параллельными данным скрещивающимся прямым.

2.2. *Угол между прямой и плоскостью* это угол между прямой и ее проекцией на плоскость.



A_1O – проекция AO на плоскость α;

$\angle AOA_1$ – угол между прямой АО и плоскостью α.

2.3. Угол двумя плоскостями.

Фигура, образованная в пространстве двумя полуплоскостями, имеющими общую граничную прямую и не лежащими в одной плоскости, называется *двугранным углом*.

Плоскость перпендикулярная к ребру двугранного угла, в пересечении с его гранями дает угол, называемый *линейным углом* двугранного угла.

Величиной двугранного угла называют величину его линейного угла.

Если две плоскости пересекаются, то углом между ними называется величина наименьшего из образованных ими двугранных углов.

3. Многогранники

Объём призмы $V = S_{осн}H$. Объём пирамиды $V = \frac{1}{3}S_{осн}H$.

Объем многогранника, в который вписан шар радиуса r: $V = \frac{1}{3}r \cdot S_{пов}$

4. Фигуры вращения

Площадь полной поверхности цилиндра: $S_{пов} = 2S_{осн} + S_{бок} = 2\pi R^2 + 2\pi RH$

Объём цилиндра: $V = S_{осн}H$.

Объём конуса: $V = \frac{1}{3}S_{осн}H$.

Площадь боковой поверхности конуса: $S_{бок} = \pi Rl$, где l – образующая конуса.

Площадь полной поверхности конуса: $S_{пов} = S_{осн} + S_{бок} = \pi R^2 + \pi Rl$

Объём шара: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

Площадь поверхности шара: $S_{пов} = 4\pi R^2$

Объём усеченного конуса: $V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2)$

Практика:

1. В параллелепипеде длины ребер, исходящих из одной вершины равны a, b, c. Ребра a и b взаимно перпендикулярны, а ребро c образует с каждым из них угол α. Найдите объем параллелепипеда.

2. Ребро наклонного параллелепипеда равно l. К нему примыкают две смежные грани, у которых площади равны m^2 и n^2, а их плоскости образуют угол 30^0. Вычислите объем параллелепипеда.

3. Боковые грани правильной треугольной призмы – квадраты. Найти угол между диагональю боковой грани и не пересекающей ее стороной основания.

4. (ЕГЭ-2007) Дана правильная треугольная пирамида со стороной основания, равной $2\sqrt{7}$. Центр основания пирамиды является вершиной конуса, окружность основания которого вписана в боковую грань пирамиды. Найдите радиус основания конуса.

5. (ЕГЭ-2005) Дана правильная призма $ABCA_1B_1C_1$, где AA_1, BB_1 и CC_1 – боковые ребра. Сфера, центр которой лежит на ребре AA_1, пересекает ребро A_1C_1 в точке M и касается

плоскости основания ABC и плоскости CBB_1. Известно, что $AB = 12$, $A_1M : MC_1 = 3 : 1$. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

6. (МФТИ-2005) Сфера касается боковых граней четырехугольной пирамиды $SABCD$ в точках, лежащих на ребрах AB, BC, CD, DA. Известно, что высота пирамиды равна $2\sqrt{3}$, $AB = 9$, $SA = 6$, $SB = 9$, $SC = 2\sqrt{33}$. Найдите длины ребер BC и CD, радиус сферы и двугранный угол при ребре SD.

7. (МГУ, физфак-1994) Наклонная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеет своими основаниями трапеции $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Сумма площадей параллельных боковых граней призмы равна S, а расстояние между этими гранями равно d. Найти объем многогранника $BDA_1B_1C_1D_1$.

8. (2009/2010, II этап 11.3) Для каждого из 8 сечений куба с ребром a, являющихся треугольником с вершинами в серединах ребер куба, рассматривается точка пересечения высот сечений. Найдите объём многогранника с вершинами в этих 8 точках.

9. (МФТИ) Внутри цилиндра лежат два шара радиуса r и один шар радиуса $1{,}5r$ так, что каждый шар касается двух других и боковой поверхности цилиндра, причем первые два равных шара касаются нижнего основания, а третий шар касается верхнего основания цилиндра. Найдите радиус основания цилиндра, если его высота равна $4r$.

10. (МГУ, мехмат, 1994) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Сфера касается ребер AD, DD_1, CD и прямой BC_1. Найдите радиус сферы, если длины рёбер куба равны 1.

11. Площадь одной из боковых граней треугольной призмы равна m^2. Найти объем призмы, если расстояние от противолежащего ребра до плоскости этой грани равно $2a$.

12. (Муниципальный этап 2013-2014, 11.3) В треугольной пирамиде $SABC$ на ребре SB взята точка M, делящая отрезок SB в отношении 3:5, считая от вершины S. Через точки A и M параллельно медиане BD треугольника ABC проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

13. Противоположные рёбра треугольной пирамиды попарно равны. Докажите, что все грани этой пирамиды – равные остроугольные треугольники.

14. Докажите, что если у тетраэдра два отрезка, идущие из концов некоторого ребра в центры вписанных окружностей противолежащих граней, пересекаются, то отрезки, выпущенные из концов скрещивающегося с ним ребра в центры вписанных окружностей двух других граней, также пересекаются.

15. (Московская математическая олимпиада) Дана правильная пирамида. Из произвольной точки P её основания восставлен перпендикуляр к плоскости основания.

Доказать, что сумма расстояний от точки P до точек пересечения перпендикуляра с плоскостями граней пирамиды не зависит от выбора точки P на основании.

16. Существуют ли в пространстве четыре точки A, B, C, D такие, что $AB = CD = 8$ см, $AC = BD = 10$ см, $AD = BC = 13$ см?

17. (МФТИ) В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ боковое ребро равно a и равно диагонали основания $ABCD$. Через точку A параллельно прямой BD проведена плоскость P, образующая с прямой AD угол, равный $arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}$. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью P и радиус шара, касающегося плоскости P и четырех прямых, которым принадлежат боковые ребра пирамиды.

18. (Всероссийская олимпиада, II этап, 2004) Через точку, находящуюся на расстоянии a от центра параллелограмма, проведена плоскость. Докажите, что сумма расстояний от вершин параллелограмма до этой плоскости не превосходит $4a$. Плоскость не пересекает параллелограмм.

Тема 20. Анализ задач регионального этапа Всероссийской олимпиады по математике

Тема 21. Итоговая контрольная работа

1. При каждом значении параметра a определите количество корней уравнения $3x^4 - 2x^3 - 3x^2 - a = 0$.

2. Решить уравнение $4 \cdot \sqrt[n]{(2x-7)^2} + \sqrt[n]{(2x+7)^2} = 4 \cdot \sqrt[n]{4x^2-49}$ относительно переменной x.

3. Найдите все значения параметра p, при которых уравнение $9\sqrt{x^3} + p = 18 \cdot \sqrt{x^2} - 9 \cdot \sqrt{x} + 1$ имеет ровно три корня.

4. В треугольнике ABC на стороне BC, выбрана точка K так что $CK : BK = 1 : 2$. Точка E – середина стороны AB. Отрезки CE и AK пересекаются в точке P.

а) Докажите, что треугольники BPC и APC имеют равные площади.

б) Найдите площадь треугольника ABP, если площадь треугольника ABC равна 120.

5. Уравнение $2x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ с целыми коэффициентами имеет три различных корня. Оказалось, что первый корень является синусом, второй – косинусом, а третий – тангенсом одного угла. Найдите все такие уравнения.

6. Решите задачу двумя различными методами, один из которых векторно-координатный или координатный.

На ребрах CD и BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 12 отмечены точки P и Q соответственно, причем $DP = 4$, а $B_1Q = 3$. Плоскость APQ пересекает ребро CC_1 в точке M.

а) Докажите, что точка M является серединой ребра CC_1.

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости APQ.

Тема 22. Анализ итоговой контрольной работы

2.5. Рабочие программы (модули) курсов, дисциплин, которые входят в состав программы (для модульных, интегрированных, комплексных и т.п. программ)

Не предусмотрено.

3. Список литературы

1. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993–2006: Окружной и финальный этапы / Н. Х. Агаханов и др. Под ред. Н. Х. Агаханова. – М.:МЦНМО, 2007. – 472 с.
2. Журналы “Математика в школе”, “Квант”.
3. Канель-Белов, А.Я. Как решают нестандартные задачи / Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. – М.: МЦНМО,2008. – 96 с.
4. Литвинов, В.Л. 88 занимательных и олимпиадных задач по математике / В.Л. Литвинов. – Самара, 2015. – 43 с.
5. Васильев, Н.Б. Избранные олимпиадные задачи. Математика [Текст] / Н.Б. Васильев, А.П. Савин, А.А. Егоров – М.: Бюро Квантум, 2007. – 160 с. (Библиотечка «Квант», вып. 100, приложение к журналу «Квант» №2 / 2007).
6. Электронный научный журнал «Вестник Омского государственного педагогического университета» Выпуск 2006. – www.omsk.edu
7. Спивак, А.В. Математический кружок / А.В. Спивак. – М.: Посев, 2003. – 128 с.
8. Фарков, А.В. Математические олимпиады [Текст] / А.В. Фарков. – М.: Экзамен, 2006. – 160 с.
9. Турецкий, Е.Н. Как научиться решать задачи / Е.Н. Турецкий, Л. М. Фридман. – М.: Просвещение, 1989. – 192 с.
10. Пойа, Д. Математическое открытие. Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание / Д. Пойа. – М.: Наука, 1970. – 452 с.
11. Школьные учебники математики, алгебры и начал анализа.
12. Чамян П.Г. Инварианты: одинаковые и разные [Текст] / П.Г. Чамян, Г.А. Воробьев // Интеграционные тенденции современной науки: материалы III межвуз. Науч.-практ. конф. – Липецк: ЛГПУ, 2010. – С. 25-29.
13. Сайты вузовских (перечневых олимпиад).
14. problems.ru – проект МЦНМО при участии школы № 57.
15. http://comp-science.narod.ru/ – учителям математики и информатики.
16. http://kvant.mccme.ru/ – журнал “Квант”.
17. http://lib.mexmat.ru/forum/ – форум мехмата МГУ, обсуждаются вопросы, проблемы и задачи по математике.

18. http://math-on-line.com – Математика-он-лайн. Занимательная математика школьникам.

19. http://mmmf.math.msu.su/ – малый мехмат МГУ.

20. http://olympiads.mccme.ru/mmo/ – Московская математическая олимпиада.

21. http://school-collection.edu.ru – единая коллекция цифровых образовательных ресурсов (задачи Московских олимпиад, классифицированные по темам).

22. http://www.metaschool.ru – Интернет-кружки, интернет-олимпиады, интернет-репетитор.

23. https://olimpiada.ru – портал Всероссийской олимпиады школьников.

24. http://www.school.mipt.ru/ – ЗФТШ МФТИ.

25. http://www.turgor.ru/ – Турнир Городов – международная математическая олимпиада для школьников.

26. http://www.zaba.ru/ – Математические олимпиады и олимпиадные задачи.