СБОРНИК ЗАДАНИЙ

VII МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

«УНИКУМ»

ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 3-6 КЛАССОВ

Учебное пособие

Липецк
2016

МАУ ДО «Центр дополнительного образования «Стратегия»

СБОРНИК ЗАДАНИЙ VII МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ «УНИКУМ» ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 3-6 КЛАССОВ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Составители: Г.А. Воробьев, И.А. Шуйкова, П.Н. Азаров, М.А. Косых

Липецк – 2016

ББК 22.1
УДК 37
С23

Сборник заданий VII математической олимпиады «УНИКУМ» для учащихся 3-6 классов: Учебное пособие / Сост.: Г.А. Воробьев, И.А. Шуйкова, П.Н. Азаров, М.А. Косых. – Липецк: МАУ ДО «Центр дополнительного образования «Стратегия», 2016. – 31 с.

Пособие предназначено для учащихся 3-6 классов общеобразовательных учреждений, желающих расширить свои знания и умения в математике, как школьной, так и олимпиадной. В состав сборника вошли задания VII олимпиады «Уникум», ответы и указания к их решению.

Предисловие

Математическая Олимпиада школьников 3-6 классов «Уникум» проводится ежегодно, начиная с 2010 года, факультетом физико-математических и компьютерных наук Липецкого государственного педагогического университета и Центром дополнительного образования «Стратегия», которыми накоплен значительный опыт по довузовской работе со школьниками, проявляющими математические способности. Работа преподавателей Липецкого государственного педагогического университета и Центра «Стратегия» с такими ребятами складывается из нескольких составляющих: проведение занятий по дополнительным общеразвивающим программам в течение года; организация и проведение «Математических боев» среди школьных команд города Липецка; проведение математической Олимпиады «Уникум»; организация летних и зимних профильных школ Центра «Стратегия»; малая математическая академия Центра «Стратегия».

Олимпиада «Уникум» предоставляет прекрасную возможность для школьников 3-6 классов соотнести свои знания со знаниями сверстников, развить свои способности, почувствовать атмосферу конкурса, получить призы, а также интересно и с пользой провести время. В рамках Олимпиады «Уникум» традиционно проходит семинар для учителей математики, на котором преподаватели университета проводят разбор решения нестандартных задач для обучающихся младшего и среднего школьного возраста.

Олимпиада проводится по классическим правилам – школьники получают в аудитории тексты задач и в течение часа решают их, оформляя подробное решение на специальных бланках. Текст олимпиады, рассматриваемой в сборнике, состоит из десяти заданий различного уровня сложности, который, как правило, увеличивается от первых к последним задачам. Некоторые задачи, посильные разным возрастным группам школьников, повторяются в разных вариантах. Первые задачи не представляют особой трудности для большинства обучающихся, что создаёт мотивацию к решению последующих задач. Наличие относительно несложных одной-двух первых задач также особо необходимо тем школьникам, которым пока не по силам более серьёзные задачи.

В данном пособии приведены не только условия, но и краткие указания к решению почти всех задач. Пособие в первую очередь рассчитано на тех учащихся, для которых важно научиться искать решение самостоятельно. Не всегда у школьников есть возможность в течение учебного года ознакомиться с подходами к решению олимпиадных задач, идеями и методами их решения. Приведённые в сборнике решения задач помогут учащимся приобрести новые знания, идеи и расширить свой математический инструментарий. Если ребёнок только начал осваивать методы решения нестандартных задач, то ему уместно будет сначала предложить читать и разбирать предложенные задачи совместно с Вами – родителями и учителем, а после этого попробовать решать новые задачи самостоятельно. Наиболее способным и хорошо решающим ребятам лучше, наоборот, сначала решить задачи самостоятельно, а затем обсудить решение с учителем.

Задачи пособия различны по тематике и могут быть использованы учителями на занятиях математических факультативов и спецкурсов. Одним ребятам решение предложенных задач позволит подняться на новый уровень математического мышления, другим – предоставит возможность заняться любимым делом. В любом случае, каждого из школьников ожидает свой собственный процесс развития и мы, ребята, желаем Вам успехов в этом занимательном путешествии!

До встречи на Олимпиаде «Уникум»!

Задания VII математической олимпиады для младших школьников «Уникум», 12-13 мая 2016

Математическая олимпиада «Уникум». 3 класс

Длительность – 70 минут.

Количество заданий – 10.

Решение задач должно содержать необходимые пояснения. *Все варианты ответов, если их несколько, должны быть указаны. Если ответ один, то должны быть объяснения, почему нет других вариантов ответов. Желаем успеха!*

1. Вычислите: 28 + 516 + 534 + 472 + 466

Ответ: 2016.

2. Как изменится сумма, если одно слагаемое увеличили на 2016, а второе уменьшили на 2015?

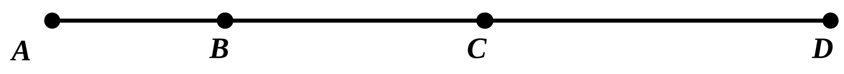
Решение. 2016 – 2015 = 1.

Ответ: 1.

3. Маша купила на 200 рублей груш, а Катя на 200 рублей апельсинов. У какой из девочек вес фруктов оказался больше, если апельсины стоили 90 рублей за килограмм, а груши 110 рублей за килограмм?

Ответ: у Кати.

4. Сколько различных отрезков изображено на рисунке?



Решение. Отрезки *AB*, *AC*, *AD*, *BC*, *BD*, *CD*.

Ответ: 6.

5. Лифт поднимается с первого этажа на пятый за 40 секунд. За сколько секунд лифт поднимется с первого этажа на 10? Скорость движения лифта не меняется.

Решение. Между первым и пятым этажами лифт преодолевает 4 этажа. Следовательно, на каждый этаж тратится 10 секунд.

Между первым и 10 этажами лифт преодолевает 9 этажей. Значит, с первого этажа на 10 он поднимется за $9 \cdot 10 = 90$ секунд.

Ответ: 90.

6. Школьник узнал, что шоколад способствует улучшению работы мозга, поэтому, проснувшись в день олимпиады «Уникум» в 8:00 утра, он съел шоколадную конфету, и в дальнейшем решил есть по одной конфете каждые полчаса. Сколько конфет успел съесть школьник до олимпиады, которая началась в 10:00? Последнюю конфету он съел одновременно с началом олимпиады.

Решение. Первую конфету школьник съел в 8:00, а последнюю в 10:00.

Ответ: 5 конфет.

7. Самообучающийся робот пока научился выполнять только два действия: он может к имеющемуся числу прибавить 3, а также может увеличить имеющееся число в два раза. Как роботу из 2 получить 100?

Решение. Например, $(2 + 3 + 3 + 3) \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 + 3 + 3 + 3 + 3 = 100$.

Комментарий. *Количество операций, необходимых роботу, не влияет на оценку.*

8. На столе в ряд лежат 10 карточек с числами: 50, 25, 150, 2016, 280, 1000, 350, 20, 400, 70. Петя и Вася по очереди забирают себе по карточке (числа видны играющим), но брать можно только карточку, лежащую с края (слева или справа). Начинает Петя. Когда каждый наберёт по 5 карточек, игра заканчивается. Тот, у кого сумма чисел окажется больше, выигрывает. Кто и как выиграет при правильной игре?

Решение. *1 способ*.

1. Петя выиграет. Для этого он своими первыми четырьмя ходами не берёт карточки с числами 150 и 280, если одну из этих карточек ранее не взял Вася (как только Вася взял карточку с числом 150 или с числом 280, Вася следующим ходом забирает карточку с числом 2016). Если карточки с числами 150 и 280 не были взяты после 7 первых ходов играющих, то перед предпоследним ходом Васи остаются карточки 150, 2016, 280, и, Вася вынужден взять карточку с числом 150 или с числом 280. Следующим ходом Петя забирает карточку с числом 2016.

2. В результате описанной стратегии карточка с числом 2016, а также ещё четыре карточки оказываются у Пети. Минимальное значение суммы чисел на Петиных карточках равно

$$50 + 25 + 2016 + 20 + 70 = 2181.$$

А максимальное значение суммы чисел на Васиных карточках равно

$$150 + 280 + 1000 + 350 + 400 = 2180.$$

$2181 > 2180$, Петя выиграет.

2 способ. Мысленно покрасим карточки поочередно в красный и белый цвета. Так как исходная сумма чисел нечётна, то суммы чисел на белых и красных карточках не равны. Петя выигрывает если всё время будет брать карточки того цвета, где сумма чисел больше. В рассматриваемом примере Петя берёт карточки: 25, 2016, 1000, 20 и 70.

Ответ: Петя выиграет.

9. *Старинная задача.* Путешественник идёт из одного города в другой 10 дней, а второй путешественник тот же путь проходит за 15 дней. Через какое количество дней встретятся путешественники, если выйдут одновременно навстречу друг другу из этих городов?

Решение. За 30 дней путешественники проходят 30 : 10 + 30 : 15 = 5 расстояний между городами. Значит, за 30 : 5 = 6 дней они пройдут нужное расстояние.

Ответ: через 6 дней.

10. Ангелина, как и вы, знает, что числами Фибоначчи называют такую последовательность чисел, которая начинается следующим образом: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …. Как вы видите, каждый следующий член последовательности, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих. Поскольку Ангелине очень нравятся чётные числа, то она решила посчитать – сколько чётных чисел в последовательности Фибоначчи, начиная с первого и заканчивая 20 числом. Ангелина училась в школе на одни пятёрки и подумав немного, она догадалась, что вовсе не обязательно вычислять все числа Фибоначчи, чтобы ответить на вопрос задачи. Достаточно подметить некоторую закономерность. Просим и вас ответить на вопрос – сколько чётных чисел Фибоначчи среди первых двадцати чисел?

Решение. Понаблюдав за числами Фибоначчи, можно подметить следующую закономерность – каждое третье число Фибоначчи – чётное. Это правило выполняется так как, сумма двух нечётных чисел, число чётное (например, 1 + 1 = 2), сумма четного и нечетного числа нечётна (например, 1 + 2 = 3), двух чётных чисел подряд в последовательности не будет.

Среди 20 первых чисел Фибоначчи 6 полных троек чисел, в каждой тройке по одному чётному числу, и ещё два нечётных числа. Значит, 6 чётных чисел Фибоначчи в рассматриваемой части последовательности. В дальнейшем, школьникам станет известно, что Fm делится на Fn тогда и только тогда, когда m делится на n (за исключением n = 2).

Ответ: 6 чётных чисел.

Математическая олимпиада «Уникум». 4 класс

Длительность – 70 минут.

Количество заданий – 10.

Решение задач должно содержать необходимые пояснения. *Все варианты ответов, если их несколько, должны быть указаны. Если ответ один, то должны быть объяснения, почему нет других вариантов ответов. Желаем успеха!*

1. В саду посадили 2016 саженцев. Из всех саженцев, кроме 1000, выросли груши. На всех грушах, кроме 100, растут плоды. Плоды со всех плодоносящих груш, кроме одной, невкусные. На скольких грушах вкусные плоды?

Решение. Значение имеет только предпоследнее предложение: «Груши со всех плодоносящих груш, кроме одной, невкусные». Более длинные, но правильные объяснения, также засчитываются.

Ответ: на 1 груше.

2. Какое одно и то же число надо записать в каждый из прямоугольников, чтобы равенство $4032 : \boxed{} = \boxed{} : 1008$ стало верным?

Ответ: 2016.

3. При подготовке к олимпиаде Уникум ученик планировал решить 120 задач равномерно за 30 дней. Однако он каждый день успевал решить на две задачи больше, чем планировал. Сколько задач решил ученик?

Решение. *1 способ.*

1. $2 \cdot 30 = 60$ задач – перевыполнение плана.

2. $120 + 60 = 180$ задач – решил ученик.

2 способ.

1. $120 : 30 = 4$ задачи – планировал ученик решить за день.

2. 4 + 2 = 6 задач – решал ученик за день.

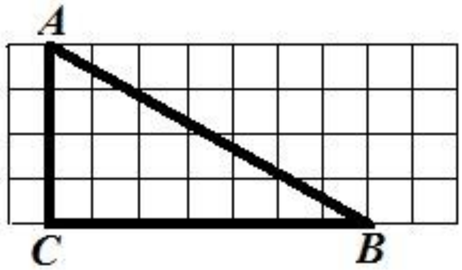
3. 30 · 6 = 180 задач – решил ученик.

Ответ: 180.

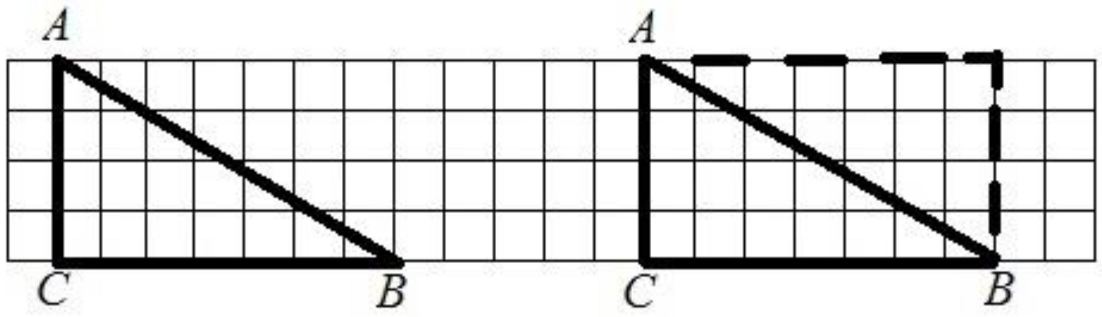
4. Можно ли числа 2; 4; 6; 8; 2016 записать в строку так, чтобы из любых двух соседних чисел одно делилось бы на другое.

Ответ: да, например: 6, 2016, 2, 4, 8.

5. Чему равна площадь треугольника *ABC* (см. рисунок), если длина стороны *AC* равна 4 см, а длина стороны *BC* равна 7 см?



Решение. Достроим данный треугольник до прямоугольника. Площадь полученного прямоугольника равна 4 · 7 = 28 см^2. Площадь треугольника *ABC* в два раза меньше площади полученного прямоугольника: 28 : 2 = 14 см^2.



Ответ: 14 см^2.

6. Директор Центра «Стратегия» раздала четверым Уникумам, показавшим лучший результат на олимпиаде, 2016 вкусных конфет. Пятиклассник получил на две конфеты больше, чем шестиклассник. Четверокласник – на две больше пятиклассника, а третьеклассник – на две больше четвероклассника. Сколько конфет у третьеклассника?

Решение. Пока Уникумы не стали есть конфеты, заберём две конфеты у пятиклассника, четыре – у четвероклассника и шесть – у третьеклассника. Мы забрали 12 конфет, т.е. осталось 2004 конфеты, каждому по 501 конфете. Значит, директор дала третьекласснику 507 конфет.

Ответ: 507 конфет.

7. Разделите полоску на четыре одинаковые части (совпадающие при наложении) так, чтобы все части имели одну и ту же сумму чисел, записанных в клетках.

2001	2009	2016	2007	2012	2005	2004	2003
2008	2015	2010	2002	2013	2006	2011	2014

Решение. Заметим, что сумма всех чисел в ячейках полоски равна 32136. Значит, сумма чисел в одной отрезанной ячейке равна 8034. Далее подбираем рядом стоящие четыре клетки, чтобы сумма в них была равна 8034.

2001	2009	2016	2007	2012	2005	2004	2003
2008	2015	2010	2002	2013	2006	2011	2014

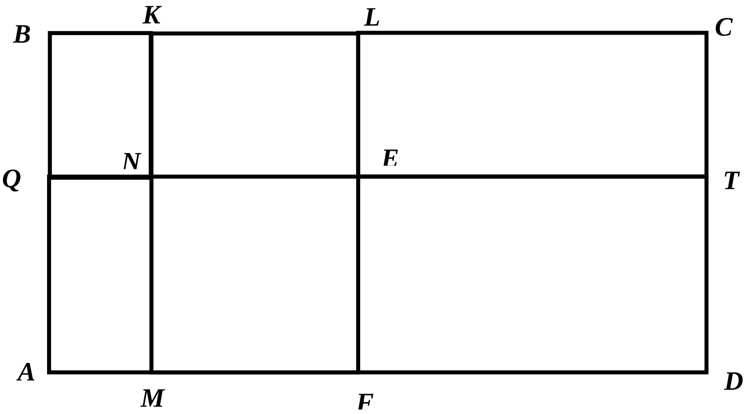
8. В прямоугольнике *ABCD* стороны *AB* = *CD* = 5 см и *BC* = *AD* = 10 см. Точки *Q* и *T* середины сторон *AB* и *CD*. На стороне *BC* отмечены точки *K* и *L* так, что *BK* = 2 см и *BL* = 5 см. На стороне *AD* отмечены точки *M* и *F* так, что *AM* = 2 см и *AF* = 5 см. Определите, у какого четырехугольника площадь больше, у *QKTM* или у *ALTF*.

Решение. 1. Отметим точки *N* и *E* как показано на рисунке.

2. Диагональ прямоугольника делит его площадь пополам. Поэтому площадь четырёхугольника *QKTM* равна сумме половинок площадей прямоугольников *QBKN*, *TCKN*, *NTDM* и *QNMA*. Площадь любой фигуры

равна сумме площадей её частей, следовательно, площадь четырёхугольника *QKTM* равна половине площади прямоугольника *ABCD*.

3. Аналогично, площадь четырёхугольника *ALTF* равна сумме половинок площадей прямоугольников *QBLE*, *TCLE*, *ETDF* и *QEFA*. Следовательно, площадь четырёхугольника *QKTM* равна половине площади прямоугольника *ABCD*.



Ответ: площади многоугольников равны.

9. Полина и Василина придумали игру. Они нарисовали на бумаге картину – три белых цветочка. Потом девочки по очереди перекрашивают по одному цветочку, начинает Полина. Если цветок был белым, он становится красным, а если был красным – становится белым. Делая ход, игрок может выбрать любой цветочек (в том числе и ранее перекрашенный), но при условии, что после смены цвета картина не станет точно такой же, какой она была в какой-то предыдущий момент. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может гарантировать себе победу, как бы ни играл его соперник?

Решение. 1. Выигрывает первый игрок – он может гарантировать себе победу, как бы ни играл его противник.

2. Одно из возможных решений. Закодируем 0 – белый цвет цветочка, 1 – красный цвет. Исходная позиция игры 000. Первый игрок делает

ход, перекрашивая один предмет – получаем последовательность с одной единицей. Например, 001.

Количество единиц после хода первого всегда нечетно, а после хода второго всегда чётно.

Остальные возможные позиции разобьём на пары:

Возможный ход второго игрока	Ответный ход первого игрока
011	010
101	111
110	100

В таблице указан ход первого игрока, соответствующий каждому из возможных ходов второго игрока. В таблице не указан порядок ходов второго игрока.

У первого игрока всегда есть ответный ход, а, следовательно, он выиграет.

Ответ: выигрывает первый игрок.

Комментарий. *Первоначальную позицию 000 в дальнейшем использовать нельзя, она уже встречалась.*

10. Найдите всевозможные решения ребуса:

$$СТРА + ТЕГ – ИЯ = 2016.$$

Здесь разные буквы обозначают разные цифры, причём согласным соответствуют цифры не больше пяти, а гласным соответствуют цифры больше пяти?

Решение. 1. СТРА + ТЕГ = 2016 + ИЯ < 2016 + 100 = 2116, а СТРА + ТЕГ > 2016 + 10 =2026. Если С = 2, тогда минимальное значение Т равно 1, и СТРА + ТЕГ ≥ 2100 + 100 = 2200. Противоречие, значит С = 1.

2. Аналогично, если Т < 6. Если Т = 4, тогда СТРА + ТЕГ < 1400 + 100 + 400 + 100 = 2000 < 2016. Противоречие, значит Т = 5. Получаем: 1500 + РА + 500 + ЕГ = 2016 + ИЯ;

РА + ЕГ = 16 + ИЯ.

Я принимает значения от 6 до 9, а значит 16 + ИЯ оканчивается на одну из цифр 2, 3, 4, 5:

$$6 + 6 = 12;\ 6 + 7 = 13;\ 6 + 8 = 14;\ 6 + 9 = 15.$$

Так как Г принимает одно из значений 0, 2, 3, 4, то чтобы правая часть оканчивалась на такие же цифры, нужно брать одну из следующих сумм: А + Г = 9 + 3 = 12; А + Г = 9 + 4 = 13; А + Г = 8 + 4 = 12. Значит Я = 6 или 7.

Пусть Я = 6, и пусть А + Г = 9 + 3. Р0 + Е0 + 12 = 16 + 6 + И0; откуда Р + Е = И + 1. Откуда Р = 2; И = 8; Е = 7.

3. Аналогично, находим остальные решения: второй случай, если А + Г = 8 + 4; третий случай, если Я = 7; А + Г = 9 + 4.

Ответ: а) 1529 + 573 – 86 = 2016 (С = 1; Т = 5; Р = 2; А = 9; Е = 7; Г = 3; И = 8; Я = 6),

б) 1538 + 574 – 96 = 2016 (С = 1; Т = 5; Р = 3; А = 8; Е = 7; Г = 4; И = 9; Я = 6),

в) 1539 + 564 – 87 = 2016 (С = 1; Т = 5; Р = 3; А = 9; Е = 6; Г = 4; И = 8; Я = 7).

Математическая олимпиада «Уникум». 5 класс

Длительность – 80 минут.

Количество заданий – 10.

Решение задач должно содержать необходимые пояснения. *Все варианты ответов, если их несколько, должны быть указаны. Если ответ один, то должны быть объяснения, почему нет других вариантов ответов. Желаем успеха!*

1. Вычислите значение выражения $10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9$.

Ответ: 0.

2. Замените каждую $*$ цифрой так, чтобы получилось верное равенство: $**16 \cdot * = 120*6$. Укажите все возможные варианты замен, если их несколько. Объясните отсутствие других вариантов замен.

Решение. 1. Последняя цифра 6 в произведении может получиться, только если второй множитель 1 или 6. 1 не подходит, так как в этом случае произведение будет четырехзначным.

2. Получим равенство $**16 \cdot 6 = 12096$. Для получения 0 в произведении вторая цифра первого множителя должна быть 0 или 5. 5 не подходит.

3. Получаем единственный правильный ответ $2016 \cdot 6 = 12096$.

Ответ: $2016 \cdot 6 = 12096$.

3. 2016 жителей острова правдолюбцев и лжецов встали в круг, и каждый из них заявил, что оба его соседа правдолюбцы. Сколько правдолюбцев и сколько лжецов могло быть среди этих 2016 человек? Укажите все ответы и обоснуйте их.

Правдолюбцами будем называть тех людей, которые всегда говорят только правду. Лжецами тех, которые всегда только лгут.

Решение. 1. Если один из 2016 жителей правдолюбец, то и его соседи правдолюбцы, следовательно, все 2016 человек правдолюбцы.

2. Если один из 2016 жителей лжец, то среди 2016 человек правдолюбцев уже не будет (по первому случаю). Следовательно, все 2016 человек лжецы.

Ответ: все 2016 человек правдолюбцы или все 2016 человек лжецы.

4. Из города A в поселок B, расстояние между которыми 30 км, вышел пешеход. Через некоторое время вслед за ним со скоростью 15 км/ч выехал велосипедист. Прибыв в B, велосипедист тотчас повернул обратно и ехал до второй встречи с пешеходом. Пешеход и велосипедист встречались дважды, причём расстояние от B во время второй встречи было таким же, как расстояние от A при первой встрече. Сколько времени шёл пешеход от первой встречи с велосипедистом до второй встречи с ним?

Решение. Между первой и второй встречей велосипедист проехал 30 км со скоростью 15 км/ч, следовательно, он затратил на этот путь 30 : 15 = 2 ч. Пешеход затратил столько же времени.

Ответ: 2 ч.

5. В корзине лежат 9 бананов. Имеются электронные весы, с помощью которых можно узнать суммарный вес любых двух бананов. Помогите Уникуму за 6 взвешиваний найти общий вес всех бананов.

Решение. Взвесим первый банан со вторым, второй с третьим и третий с первым, затем сложим полученные данные, получив при этом удвоенный вес этих бананов. Осталось три взвешивания и 6 бананов, – взвешиваем их попарно и, складывая все результаты, получим общий вес.

6. Четыре пирата решили разделить четыре золотых слитка массами 10 г, 12 г, 13 г и 15 г. За помощью они обратились к ювелиру-ростовщику.

Он может взвесить и сравнить между собой два слитка, но в уплату за каждое взвешивание он забирает по 1 г от каждого из двух слитков. Сможет ли ювелир через несколько взвешиваний оставить пиратам равные слитки?

Решение. Укажем возможные значения масс слитков после каждого из взвешиваний.

(10, 12, 13, 15) → (10, 12, 12, 14) → (10, 12, 11, 13) → (10, 12, 10, 12) → (10, 11, 10, 11) → (10, 10, 10, 10).

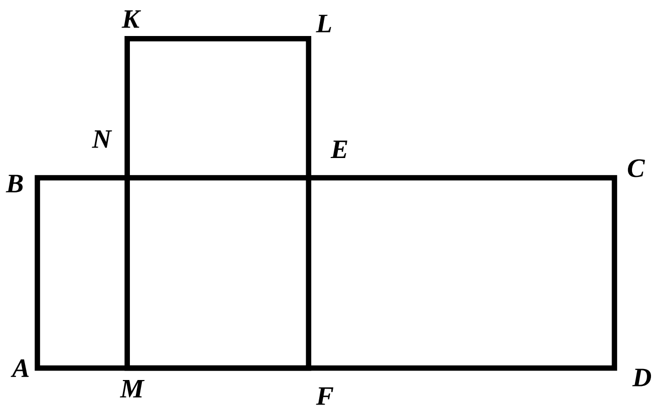
Ответ: сможет.

7. Уникум написал на доске число 20162016. Из него он вычел сумму цифр числа 20162016. Полученной разностью Уникум заменил число, записанное на доске. Описанные действия он продолжал до тех пор, пока на доске не осталась одна цифра. Какая цифра осталась на доске?

Решение. Исходное число делится на 9, следовательно, его сумма цифр также делится на 9. Разность двух чисел, каждое из которых делится на 9, также делится на 9. Таким образом, на доске останется цифра кратная 9. Ноль в итоге мог получиться только как разность цифр, поэтому ответ 9.

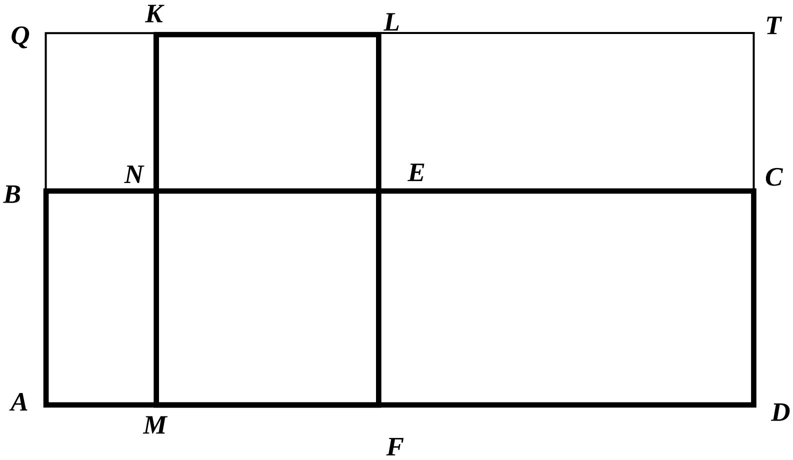
Ответ: 9.

8. Посмотрите на рисунок и определите, у какого многоугольника площадь больше, у *MBKLCF* или у *AKLD*.



Решение. 1. Дополним имеющуюся фигуру до прямоугольника *AQTD*.

2. Диагональ прямоугольника делит его площадь пополам. Поэтому площадь многоугольника *MBKLCF* равна сумме площадей прямоугольника *MKLF*, и половинок площадей прямоугольников *ABNM*, *BQKN*, *ELTC* и *FECD*. Площадь любой фигуры равна сумме площадей её частей, следовательно, площадь многоугольника *MBKLCF* равна сумме площадей прямоугольника *MKLF*, и половинок площадей прямоугольников *AQKM* и *LTDF*.



3. Площадь многоугольника *AKLD* равна сумме площадей прямоугольника *MKLF*, и половинок площадей прямоугольников *AQKM* и *LTDF*.

Ответ: площади многоугольников равны.

9. Василий, как и вы, знает, что числами Фибоначчи называют такую последовательность чисел, которая начинается следующим образом: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, …. Как вы видите, каждый следующий член последовательности, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих. Поскольку Василию очень нравятся числа и особенно число 8, то он решил посчитать – сколько чисел, которые делятся на 8 без остатка, встречаются в последовательности, начиная с десятого (это число 55) и заканчивая пятидесятым по порядку числом Фибоначчи. Василий учился в школе на одни пятёрки и, подумав немного, он догадался, что вовсе не обязательно вычислять все числа, чтобы ответить на вопрос задачи. Достаточно подметить некоторую закономерность. Просим и вас ответить на вопрос – сколько чисел Фибоначчи, кратных восьми среди чисел с номерами от 10-го до 50-го?

Решение. Понаблюдав за числами Фибоначчи, можно подметить следующую закономерность – каждое шестое число Фибоначчи кратно 8. Справедливость этого правила доказывается анализом остатков от деления на 8 чисел Фибоначчи: 1, 1, 2, 3, 5, 0, 5, 5, 2, 7, 1, 0, 1, 1, …. Остатки каждых двенадцати чисел ряда Фибоначчи повторяются.

Кратны 8 будут числа Фибоначчи с номерами: 12, 18, 24, …, 48, всего 7 чисел. Другой способ вычисления результата: $\left[\frac{50}{6}\right]-\left[\frac{9}{6}\right]=8-1=7$ (где $[x]$ – целая часть числа x, наибольшее целое число, не превосходящее число x).

Ответ: 7.

10. Петя и Вася придумали игру. Они нарисовали на бумаге картину – 4 белых яблока. Потом мальчики по очереди перекрашивают по одному яблоку, начинает Петя. Если яблоко было белым, оно становится зелёным, а если было зелёным – становится белым. Делая ход, игрок может выбрать любое яблоко (в том числе и ранее перекрашенное), но при условии, что после смены цвета картина не станет точно такой же, какой она была в какой-то предыдущий момент. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может гарантировать себе победу, как бы ни играл его соперник?

Решение. 1. Выигрывает первый игрок – он может гарантировать себе победу, как бы ни играл его противник.

2. Одно из возможных решений. Закодируем 0 – белый цвет цветочка, 1 – зелёный цвет. Исходная позиция игры 0000. Первый игрок делает ход, перекрашивая один предмет – получаем последовательность с одной единицей. Например, 0001.

Количество единиц после хода первого всегда нечётно, а после хода второго всегда чётно.

Остальные возможные позиции разобьём на пары:

Возможный ход второго игрока	Ответный ход первого игрока
0011	0010
0101	0100
1001	1000
0110	0111
1010	1011
1100	1101
1111	1110

В таблице указан ход первого игрока, соответствующий каждому из возможных ходов второго игрока. В таблице не указан порядок ходов второго игрока.

У первого игрока всегда есть ответный ход, а, следовательно, он выиграет.

Ответ: выигрывает первый игрок.

Комментарий. *Первоначальную позицию 0000 в дальнейшем использовать нельзя, она уже встречалась.*

Математическая олимпиада «Уникум». 6 класс

Длительность – 80 минут.

Количество заданий – 10.

Решение задач должно содержать необходимые пояснения. *Все варианты ответов, если их несколько, должны быть указаны. Если ответ один, то должны быть объяснения, почему нет других вариантов ответов. Желаем успеха!*

1. В саду посадили 2016 саженцев. Из всех саженцев, кроме 1000, выросли груши. На всех грушах, кроме 10, растут плоды. Плоды со всех плодоносящих груш, кроме одной, невкусные. На скольких грушах вкусные плоды?

Решение. Значение имеет только предпоследнее предложение: «Груши со всех плодоносящих груш, кроме одного, невкусные». Более длинные, но правильные объяснения, также засчитываются.

Ответ: на 1 груше.

2. Вычислите $\dfrac{2016\cdot 2018-2015}{3+2018\cdot 2015}$.

Решение. $\dfrac{2016\cdot 2018-2015}{3+2018\cdot 2015}=\dfrac{2015\cdot 2018+2018-2015}{3+2018\cdot 2015}=1$.

Ответ: 1.

3. Замените каждую $*$ цифрой так, чтобы получилось верное равенство: $**16\cdot * = 1*0*6$. Укажите все возможные варианты замен, если их несколько. Объясните отсутствие других вариантов замен.

Решение. 1. Последняя цифра 6 в произведении может получиться, только если второй множитель 1 или 6. 1 не подходит, так как в этом случае произведение будет четырёхзначным.

2. Получим равенство $**16 \cdot 6 = 1*096$. Для получения 0 в произведении вторая цифра первого множителя должна быть 0 или 5.

3. Получаем варианты $2516 \cdot 6 = 15096$, $2016 \cdot 6 = 12096$, $3016 \cdot 6 = 18096$.

Ответ: $2516 \cdot 6 = 15096$, $2016 \cdot 6 = 12096$, $3016 \cdot 6 = 18096$.

4. Число 111...111 (1008 единиц) умножили на 1001. Какова сумма цифр получившегося числа?

Решение. Т.к. $1001 = 1000 + 1$, то $111...111 \cdot 1001 = 111...111000 + 111...111 = 111222...222111$. Сумма цифр этого числа: $1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1005 = 6 + 2010 = 2016$.

Ответ: 2016.

5. Трудно найти чёрную кошку в тёмной комнате. Однако трём жителям острова правдолюбцев, лжецов и хитрецов удалось точно проверить наличие кошки в одной и той же комнате.

После этого каждый из них сделал по три следующих высказывания.

I: Я лжец. Комната тёмная. Кошка в комнате.

II: Я хитрец. Комната светлая. Кошка в комнате.

III: Я правдолюбец. Комната тёмная. Кошки в комнате нет.

Так была ли кошка в комнате во время эксперимента? Обоснуйте.

За время эксперимента освещение в комнате не менялось, кошка в комнату не забегала и не выбегала из неё.

Известно, что правдолюбцы всегда говорят только правду, лжецы всегда только лгут, хитрецы говорят правду и ложь точно через раз.

Решение. Первый житель может быть только хитрецом, поэтому комната тёмная и кошки в комнате нет. Тогда второй житель лжец, а третий правдолюбец.

Ответ: кошки в комнате не было.

6. Из города A в поселок B, расстояние между которыми 30 км, вышел пешеход. Через некоторое время вслед за ним выехал велосипедист со скоростью в четыре раза большей, чем скорость пешехода. Прибыв в B, велосипедист тотчас повернул обратно и ехал до второй встречи с пешеходом. Пешеход и велосипедист встречались дважды, причём расстояние от B во время второй встречи было таким же, как расстояние от A при первой встрече. Найдите это расстояние.

Решение. 1. Пусть x км/ч – скорость пешехода, тогда скорость велосипедиста – $4x$ км/ч. Пусть y км – искомое расстояние.

2. Рассмотрим движение пешехода и велосипедиста между первой и второй встречей. Велосипедист проехал 30 км и затратил на этот путь t ч, пешеход прошел $(30 - 2y)$ км и затратил на этот путь t ч. Получим два уравнения:

$$4xt = 30 \text{ и } xt = 30 - 2y.$$

Подставим значение xt из второго уравнения в первое.

Решив уравнение, найдем $y = 11{,}25$ км.

Ответ: 11,25 км.

7. Имеется 9 сундуков с золотом весом 10, 20, …, 90 кг (на сундуках написан их вес). Вредный пират Микитка покопался в одном из сундуков и стащил оттуда немного монет (не более 1 кг). Как за два взвешивания на двухчашечных весах без гирь, определить, в какой из сундуков сунул свой нос Микитка?

Решение. Ключевая идея этой задачи – найти две различные тройки сундуков, которые в сумме должны весить одинаково. Тогда если одна из троек при взвешивании оказалась легче, то искомый сундук находится именно в этой тройке, а в случае равновесия такой сундук находится среди тех трех, которые не взвешивались. Проще всего взять вариант, когда в каждой тройке по 150 кг в сумме, например, 10 + 50 + 90 и 30 + 40 + 80 (отложены 20, 60, 70).

При первом взвешивании разместим на весах сундуки 10, 50, 90 и 30, 40, 80. Более легкая тройка будет содержать неполный сундук. Если весы будут в равновесии, то неполный сундук в тройке 20, 60, 70.

При втором взвешивании кладем по одному сундуку легкой тройки на каждую чащу весов и дополняем вес на каждой чаше до 150 кг (номинально), это возможно для любой пары сундуков. Сундук, который был в более легкой тройке при каждом из двух взвешиваний искомый. Если весы при втором взвешивании уравновесились, то Микитка совал нос в третий сундук.

8. Уникум выписал все двухзначные числа, а затем посчитал две суммы. Для подсчёта первой суммы он вычислил в каждом двузначном числе произведение его цифр, а затем сложил все полученные произведения. Для подсчёта второй суммы он вычислил в каждом двузначном числе сумму его цифр, а затем сложил все полученные суммы. Чему равна разность двух найденных сумм?

Решение. 1. Вычислим первую сумму. Любое двухзначное число имеет вид $\overline{ab}$, где a – любая цифра от 1 до 9, а b – любая цифра от 0 до 9. Рассмотрим все возможные значения произведения ab. Их сумму удобно записать в таком виде: $(1 + 2 + ... + 9) \cdot (0 + 1 + 2 + ... + 9)$.

Действительно, при раскрытии скобок получится 90 слагаемых, каждое из которых представляет собой произведение цифр одного из 90 двухзначных чисел. Так как сумма чисел в каждой скобке равна 45, то искомое число равно 452 = 2 025.

2. Вычислим вторую сумму. В записи двухзначных цифр каждая цифра, кроме 0, используется 19 раз. Поэтому вторая сумма

$$19 \cdot (1 + 2 + ... + 9) = 19 \cdot 45 = 855.$$

3. Итоговая разность 2025 – 855 = 1 170.

Ответ: 1 170.

9. На столе в ряд лежат 100 карточек с произвольными целыми числами, их сумма нечётна. Петя и Вася по очереди забирают себе по карточке, но брать можно только карточку, лежащую с края (слева или справа). Начинает Петя. Когда каждый наберёт по 50 карточек, игра заканчивается. Тот, у кого сумма чисел окажется больше, выигрывает. Может ли Петя действовать так, чтобы всегда выигрывать у Васи, как бы тот не сопротивлялся, и какие бы числа не были записаны на карточках?

Решение. Мысленно покрасим карточки поочередно в красный и белый цвета. Так как исходная сумма чисел нечётна, то суммы чисел на белых и красных карточках не равны. Петя выигрывает если всё время будет брать карточки того цвета, где сумма чисел больше.

Ответ: Петя выиграет.

10. В начале по кругу стоят в порядке возрастания все натуральные числа от 1 до 2016. Каждым своим ходом первый игрок прибавляет к двум соседним числам по одинаковому натуральному числу (добавляемые числа могут при различных ходах меняться), а второй может поменять любые два соседних числа местами или пропустить свой ход. Первый выигрывает, если все числа станут равными. Всегда ли второй сможет ему помешать?

Решение. Второй будет добиваться того, чтобы перед каждым ходом первого чётные и нечётные числа чередовались. Тогда первому не удастся сделать все числа равными, и он не выиграет.

Первоначально все чётные и нечётные числа чередуются. Если первый игрок меняет чётность двух чисел, добавляя к ним нечётное число, то второй, поменяв числа местами, вернётся к чередованию чётности и нечётности.

Если первый игрок не меняет чётность двух чисел, добавляя к ним чётное число, то второй игрок пропускает ход.

Таким образом, после хода второго игрока чётные и нечётные числа всегда чередуются. Первый не сможет уравнять все числа.

Ответ: второй игрок всегда может помешать первому.

Список литературы

1. Васильев Н.Б., Савин А.П., Егоров А.А. Избранные олимпиадные задачи. Математика. – М.: Бюро Квантум, 2007. – 60 с. (Библиотека «Квант», вып. 100, приложение к журналу «Квант» № 2 / 2007).

2. Сборник заданий математических олимпиад «УНИКУМ» для обучающихся 3-6 классов: Учебное пособие / Сост.: Г.А. Воробьев, И.А. Шуйкова, П.Н. Азаров. – 1-е изд. – Липецк: МАУ ДО «Центр дополнительного образования «Стратегия», 2015. – 32 с.

3. Дрозина В.В., Дильман В.Л. Механизм творчества решения нестандартных задач. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. – 255 с.

4. Занимательные математические задачи. Дополнительные занятия для учащихся 6 классов: Учебное пособие / Сост.: А.М. Быковская, Г.Я. Куклина. – 2-е изд., испр. – Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2010. – 88 с.

5. Канель-Белов, А.Я. Как решают нестандартные задачи / А.Я. Канель-Белов, А.К. Ковальджи. – М.: МЦНМО, 2008. – 96 с.

6. Спивак А.В. Математический кружок. – М.: Посев, 2003. – 128 с.

7. Турецкий Е.Н., Фридман Л.М. Как научиться решать задачи. – М.: Просвещение, 1989. – 192 с.

8. Фарков А.В. Математические олимпиады. – М.: Экзамен, 2006. – 160 с.

9. Чамян П.Г., Воробьев Г.А. Инварианты: одинаковые и разные [Текст] // Интеграционные тенденции современной науки: материалы III межвузовской науч.-практ. конференции – Липецк: ЛГПУ, 2010. – С. 25-29.

10. Чамян П.Г., Воробьев Г.А. Инварианты в школе [Электронный ресурс] // Инновации и информационные технологии в образовании: Сборник науч. трудов III Международной науч.-практ. конференции; г. Липецк, 09, 29-30 апреля 2010 г. – Липецк: ЛГПУ, 2010. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – ISBN 978-5-88526-483-9.

11. Шень А. Игры и стратегии с точки зрения математики. – М.: МЦНМО, 2007. – 40 с.

12. Воробьев Г.А., Шипилов И.А. Задачи с игровым содержанием на факультативных занятиях по математике // Интеграционные тенденции современной науки: Сб. матер. III межвузовской студенческой конференции – Липецк: ЛГПУ, 2010. – С. 193-198.

13. Портал Всероссийской олимпиады школьников http://www.rusolimp.ru.

14. ЗФТШ МФТИ http://www.scool.mipt.ru.

15. Турнир Городов – международная математическая олимпиада для школьников http://www.turgor.ru.

16. Сайт «Открытые олимпиады для школьников города Липецка» http://openolymp.strategy48.ru раздел «Уникум».

Оглавление

Учебное издание для внутреннего использования

**Сборник заданий VII математической олимпиады «УНИКУМ»
для учащихся 3-6 классов**

Учебное пособие

Составители: Г.А. Воробьев, И.А. Шуйкова, П.Н. Азаров, М.А. Косых

Подписано в печать 2016 г. Бумага 80 г/м^2.
Формат 60x84/16. Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. 2,0. Тираж 50 экз.
Заказ № ____. Бесплатно. Отпечатано в ризографии ЛЭГИ.
Адрес: 398 050, Липецк, ул. Н. Логовая, 2. Тел.: (4742) 28-03-75.