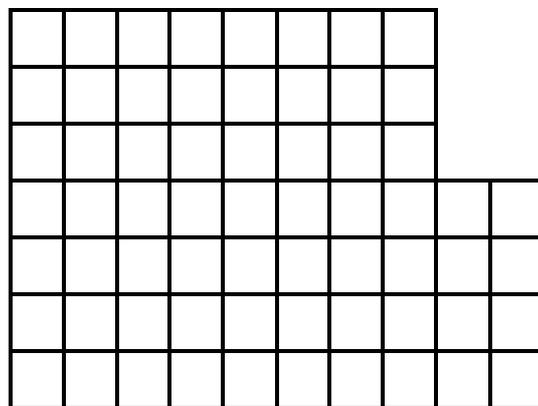




1. На классном вечере каждый мальчик танцевал, по крайней мере, с половиной девочек, а каждая девочка – не более, чем с половиной мальчиков. Докажите, что как девочек, так и мальчиков на классном вечере было четное число.

2. По кругу разложены пять карточек с различными числами, числами вниз. Разрешается четыре раза посмотреть какие-нибудь карточки (за один раз одну карточку). Можно ли после этих операций найти карточку число, на которой больше чисел на соседних карточках? Если да, то как, если нет, то почему.

3. Разрежьте изображенную на рисунке фигуру по линиям сетки на две части, из которых можно сложить квадрат.



4. Найдите количество различных шестерок множеств $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$. Множества могут совпадать, быть пустыми; наборы множеств упорядочены, т.е., для фиксированных элементов, $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ не идентично $A_2, A_1, A_3, A_4, A_5, A_6$. Элементами множеств являются натуральные числа от 1 до n такие, что любое число от 1 до n , принадлежащее хотя бы одному из множеств, содержится или ровно в трёх из них, или во всех шести.

5. Три автомата печатают на карточках пары натуральных чисел. Первый автомат по карточке $(a; b)$ выдаёт карточку $(a + 1; b + 1)$. Второй по карточке $(a; b)$ выдаёт карточку $(a/2; b/2)$ (он работает только при чётных a и b). Третий по карточкам $(a; b)$ и $(b; c)$ выдаёт карточку $(a; c)$. Кроме того, автоматы возвращают все прочитанные карточки.

Имеется только карточка $(5; 19)$. Можно ли используя автоматы некоторое число раз получить карточку $(1; 50)$? А карточку $(1; 100)$? (Н. Вагутен)

6. В мешке у Деда Мороза лежат конфеты трёх видов: шоколадные, ириски и леденцы. Дед Мороз знает, что если вынуть любые 100 конфет из мешка, то среди них обязательно найдутся конфеты всех трёх видов. Какое наибольшее количество конфет может быть в мешке у Деда Мороза?

7. В треугольнике ABC сторона $AC = 6$. Радиус вписанной окружности равен 2, радиус внеписанной окружности, касающейся стороны AC , равен 4. Чему равна площадь треугольника ABC ?

Вневписанная окружность касается стороны AC и продолжений сторон BA и BC за точки A и C соответственно.

8. Сапер (Minesweeper). Имеется прямоугольное минное поле, поделенное на закрытые клетки. Одни клетки пусты, в другие заложены мины. Любую клетку можно открыть или пометить как содержащую мину. Можно пометить и пустую клетку. Если открыть клетку с миной, то игра сразу заканчивается (сапер ошибается один раз). Открыв пустую клетку, вы увидите в ней цифру (от единицы до восьмерки), равную числу мин, находящихся в восьми клетках, которые окружают открытую вами клетку. (Если открытая пустая клетка окружена клетками, также не содержащими мин, то эти пустые клетки открываются автоматически.) Цель игры – за минимальное время правильно пометить все мины и открыть все остальные клетки.

В неоткрытых клетках 12 мин. Вычислите вероятность того, что в клетке X находится мина (см. рисунок).

