ПОЛУФИНАЛ, 13.04.2013

1. Четыре чёрненьких чумазеньких чертёнка чертили чёрными чернилами чертёж и выполнили эту работу за 3 часа. Если бы первый чертёнок чертил вдвое быстрее, а второй вдвое медленнее им потребовалось бы столько же времени, а если, наоборот, первый чертил бы вдвое медленнее, а второй – вдвое быстрее, то им хватило бы 2 часа.

За какое время начертили бы чертёж первые три чертёнка без помощи четвёртого?

2. Можно ли заполнить таблицу, состоящую из $n * n$ клеток так, чтобы произведение чисел каждого столбца было положительно, а каждой строки – отрицательно? Решите задачу для каждого натурального n.

3. $ABCD$ – вписанный в окружность четырехугольник, причем известно, что диагональ AC является биссектрисой угла DAB. Докажите, что $AC \cdot BD = AD \cdot DC + AB \cdot BC$.

4. Сто гирек стоят в ряд, при этом массы любых соседних гирек различаются на 1 г. Докажите, что гирьки можно разложить на две чашки весов так, что весы будут в равновесии.

5. Назовём трёхмерным уголком куб $2\times2\times2$, из которого вырезали угловой кубик $1\times1\times1$. Докажите, что куб размером $2^n\times2^n\times2^n$ с произвольно вырезанным единичным кубиком $1\times1\times1$ можно разрезать на трёхмерные уголки.

6. Двое играют в “морской бой” по следующим правилам: первый игрок расставляет на полоске клетчатой бумаги размера 1×100 клеток произвольное количество кораблей (возможно, ни одного) размера 1×3 клетки (расстояние между любыми различными кораблями не менее 1 клетки). Второй указывает противнику n клеток ($0 \leq n \leq 100$), по которым он одновременно производит выстрелы, после чего про каждую из этих клеток получает сообщение “попал” или “мимо”. Второй игрок выигрывает, если после этого он может однозначно указать количество кораблей противника и их расположение. При каком наименьшем n второй игрок может гарантировать себе выигрыш?

7. Имеется 77 прямоугольных брусков размером $3\times3\times1$. Можно ли ими заполнить коробку с крышкой размера $7\times9\times11$? Если да, то каким образом, если нет, то почему.

8. Есть 1000 шаров, на которых написаны числа 000, 001, 002, … ,998, 999, а также 100 корзин с надписями 00, 01, 02, … , 98, 99. Шар можно положить в корзину, если число на корзине можно получить из числа на шаре вычёркиванием одной цифры. Докажите, что все шары можно положить в 50 корзин.