0. Поезд из 10 вагонов, длина каждого из которых 20 метров въехал на мост, длина которого 200 метров со скоростью 20 метров в секунду. Сколько времени он ехал по мосту?

Решение. Длина поезда 200 метров, длина моста тоже, значит он ехал по мосту 200 + 200 = 400 метров, что по времени составило 400/20 = 20 секунд.

00. Придумайте натуральное число произведение цифр которого равно 2013 или докажите, что такого числа не существует.

Решение. В разложении числа 2013 на простые множители получится $2013 = 1 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 61$. Числа 11 и 61 не являются цифрами, поэтому искомого числа не существует.

1. На классном вечере каждый мальчик танцевал, по крайней мере, с половиной девочек, а каждая девочка – не более, чем с половиной мальчиков. Доказать, что как девочек, так и мальчиков на классном вечере было четное число.

Решение. 1. Будем рассматривать только различные пары танцевавших.

Пусть n – количество девочек, m – количество мальчиков, а k – количество танцевавших пар (различных) мальчиков и девочек, тогда $n \cdot m$ – количество всевозможных пар мальчиков и девочек, а k – количество танцевавших пар (различных) мальчиков и девочек.

2. Обозначим через m_i $(i = 1;\ 2;\ \ldots;\ n)$ – количество мальчиков танцевавших с i-й девочкой. Тогда $m_i \le \frac{m}{2}$, $\sum_{i=1}^{n} m_i = k$, следовательно $k \le \frac{n \cdot m}{2}$.

3. Аналогично, Обозначим через n_j $(j = 1;\ 2;\ \ldots;\ m)$ – количество девочек танцевавших с j-м мальчиком. Тогда $n_j \ge \frac{n}{2}$, $\sum_{j=1}^{m} n_j = k$, следовательно $k \ge \frac{n \cdot m}{2}$.

4. Таким образом, $k = \frac{n \cdot m}{2}$. Полученное равенство выполняется только в случаях $m_i = \frac{m}{2}$ и $n_j = \frac{n}{2}$, так как все m_i и n_j натуральные числа, то m и n четные. Что и требовалось доказать.

2. По кругу разложены пять карточек с различными числами, числами вниз. Разрешается четыре раза посмотреть какие-нибудь карточки (за один раз одну карточку). Можно ли после этих операций найти карточку число, на которой больше чисел на соседних карточках? Если да, то как, если нет, то почему.

Ответ: да.

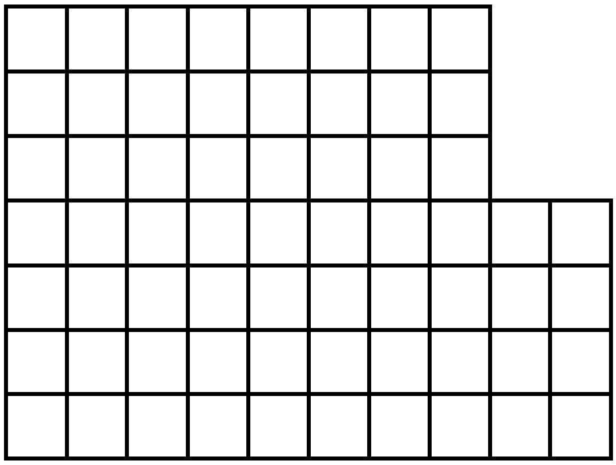
Решение. 1. Посмотрим числа на первой и третьей карточках. Без ограничения общности (то есть без потери частных случаев) будем считать, что на третьей карточке число больше.

2. Откроем четвертую карточку.

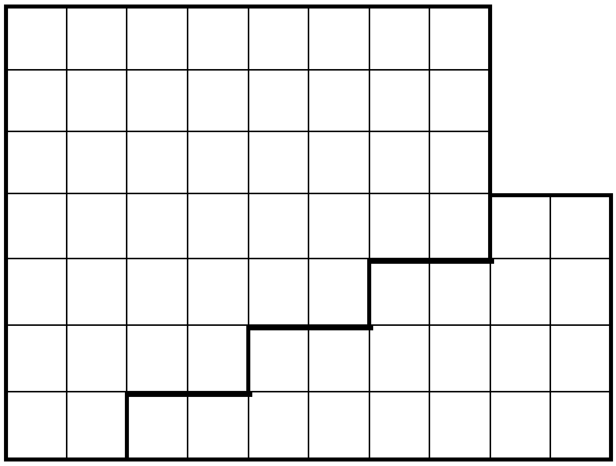
2.1. Если число на ней меньше, чем на третьей, открываем вторую карточку. Либо число на ней больше, чем на третьей и тогда вторая карточка искомая, либо меньше, тогда искомая карточка третья.

2.2. Если же число на четвертой карточке больше, чем на третьей, тогда открываем пятую карточку, и получаем ситуацию аналогичную 1 случаю.

3. Разрежьте фигуру по линиям сетки на две части, из которых можно сложить квадрат.



Решение.



4. Найдите количество различных шестерок множеств A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 . Множества могут совпадать, быть пустыми; наборы множеств упорядочены, т.е., для фиксированных элементов, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 не идентично A_2, A_1, A_3, A_4, A_5, A_6. Элементами множеств являются натуральные числа от 1 до n такие, что любое число от 1 до n, принадлежащее хотя бы одному из множеств, содержится или ровно в трёх из них, или во всех шести.

Решение. Каждое число содержится или в трёх, или в шести, или ни в одном множестве.

Сосчитаем, сколько комбинаций из трёх множеств может включать одно число, допустим число k ($0 < k \le n$) Эта задача идентична следующей задаче: сколькими способами из 6 разноцветных шаров можно выбрать 3.

Число сочетаний обозначается C_n^m и вычисляется по формуле $C_n^m = \dfrac{n!}{m!\cdot(n-m)!}$. Таким образом,

$$C_6^3 = \frac{4\cdot 5\cdot 6}{2\cdot 3} = 20$$

Вернёмся к исходной задаче. Для каждого числа k оно может содержаться в множествах 20 вариантами плюс вариант, когда все множества содержат его, и плюс вариант, когда ни одно множество не содержит его. Итого 22 варианта для каждого из n чисел. Каждому из вариантов размещения оного числа может соответствовать любой из вариантов размещения любого другого числа. Таким образом, общее количество вариантов 22^n.

5. Три автомата печатают на карточках пары натуральных чисел. Первый автомат по карточке (*a*; *b*) выдаёт карточку (*a* + 1; *b* + 1). Второй по карточке (*a*; *b*) выдаёт карточку (*a*/2; *b*/2) (он работает только при чётных *a* и *b*). Третий по карточкам (*a*; *b*) и (*b*; *c*) выдаёт карточку (*a*; *c*). Кроме того, автоматы возвращают все прочитанные карточки.

Имеется только карточка (5; 19). Можно ли используя автоматы некоторое число раз получить карточку (1; 50)? А карточку (1; 100)? (Н. Вагутен)

Решение. А) Ответ: да. (5; 19). Используя первый автомат 3 раза, получаем (8; 22). Второй автомат даёт (4; 11). Используя первый автомат 7 раза, получаем (11; 18). Третий автомат при использовании (4; 11) и (11; 18) даёт (4; 18). Кладём эту карточку во 2-й автомат, получаем (2; 9). Используя 7 раз первый автомат, получаем (9; 16). (2; 9) и (9; 16) в 3-ем автомате дают (2; 16). Кладём это во 2-й автомат и имеем (1; 8). Далее с помощью 1-го автомата получаем (8; 15), (15;22), (22; 29), (29; 36), (36; 43), (43; 50). Затем используем только 3-й автомат и из карточек (1; 8) и (8; 15) получаем (1; 15). Из (1; 15) и (15; 22) – (1; 22) и. т. д. В итоге получаем (1; 50)

Б) Нет. (19 – 5) делится на 7. Докажем, что на любой карточке которую можно получить с помощью этих 3 автоматов разность чисел делится на 7. Первый автомат не меняет разность. Второй получает карточку с 2 раза меньшей разностью, то есть, либо также делящейся на 7 либо так же не делящейся. Третий автомат, в случае, если разность на обеих карточках делится на 7, возвращает число, делящееся на 7. А т.к. (100 – 1) не делится на 7, то карточку с этими числами получить нельзя.

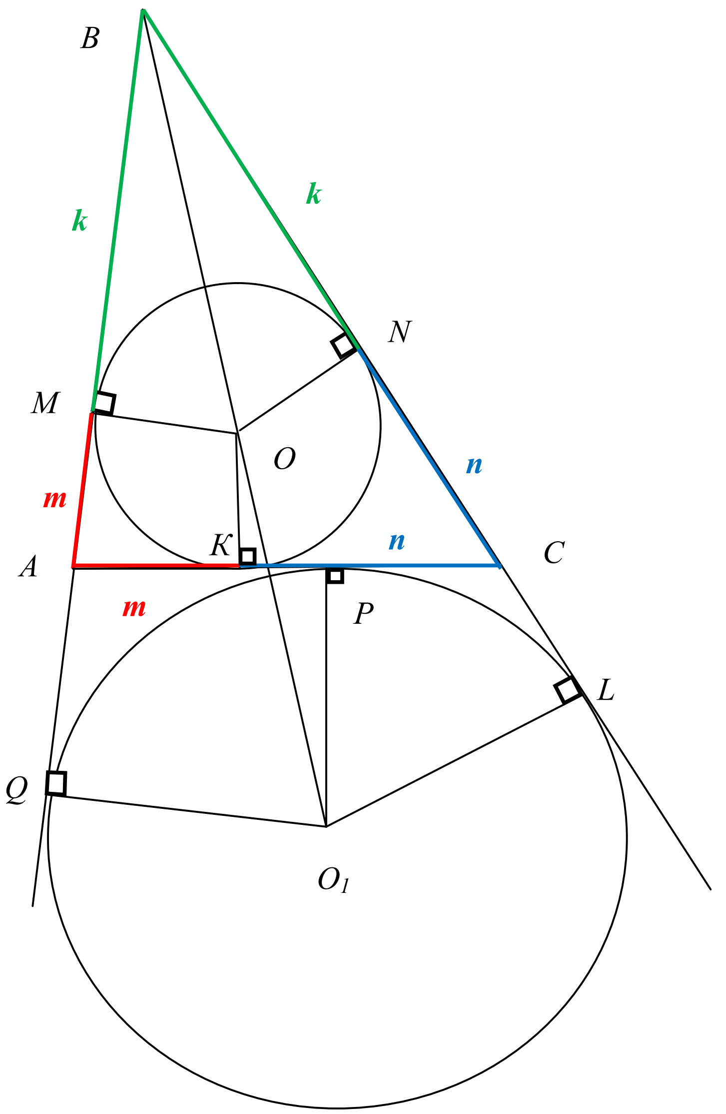
6. В мешке у Деда Мороза лежат конфеты трёх видов: шоколадные, ириски и леденцы. Дед Мороз знает, что если вынуть любые 100 конфет из мешка, то среди них обязательно найдутся конфеты всех трёх видов. Какое наибольшее количество конфет может быть в мешке у Деда Мороза?

Решение. В мешке может находиться 148 конфет: 49 ирисок, 49 леденцов и 50 шоколадных. Очевидно, если достать 100 конфет, то среди них будет, хотя бы, по одной конфете каждого вида. Если же в мешке находится не менее 149 конфет (пусть k), то хотя бы одного вида содержится не более, чем $n = [k/3]$ (где $[x]$ – целая часть от x) конфет. Достаточно рассмотреть 149 конфет, находящихся в мешке ($k = 149$), тогда количество конфет хотя бы одного не более, чем $n = 49$, и может получиться так, что все они останутся в мешке. На остальные конфеты (свыше 149) внимание можно не обращать.

7. В треугольнике *ABC* сторона *AC* = 6. Радиус вписанной окружности равен 2, радиус вневписанной окружности, касающейся стороны *AC*, равен 4. Чему равна площадь треугольника *ABC*?

Вневписанная окружность касается стороны *AC* и продолжений сторон *BA* и *BC* за точки *A* и *C* соответственно.

Решение. 1. $S_{ABC} = p \cdot r$, где p – полупериметр треугольника, $r = OM = ON = OK = 2$ – радиус вписанной окружности. Пусть O – центр окружности, вписанной в треугольник ABC, O_1 – центр вневписанной окружности. M, N, K – точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника, P, Q, L – точки касания вневписанной окружности со сторонами треугольника.



2. По свойству отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки $AM = AK = m$, $BM = BN = k$, $CN = CK = n$. Тогда полупериметр треугольника ABC равен $(2m + 2n + 2k) : 2 = m + n + k$. $m + n = AC = 6$. Чтобы найти k рассмотрим подобные треугольники QBO_1 и MBO (по двум углам: угол B общий, углы BQO_1 и BMO – прямые по свойству касательных):

$$\frac{BM}{BQ} = \frac{OM}{O_1Q} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$ следовательно,

BM = MQ, $k = m + AQ$, $AP = AQ$ (по свойству отрезков касательных, проведенных к окружности с центром O_1 из точки A), т.е. $k = m+AP$. Аналогично, рассматривая подобные треугольники BLO_1 и BNO, получим $k = n + CL = n + CP$.

$AP = m + KP$, т.е. $k = m + m + KP$;

$CP = n - KP$, т.е. $k = n + n - KP$.

Складывая почленно последние равенства, получим $2k = 2m + 2n$, т.е.
$k = m + n = 6$.

$$S_{ABC} = p \cdot r = (m + n + k) \cdot r = 12 \cdot 2 = 24.$$

Ответ: 24

8. Сапер (Minesweeper). Имеется прямоугольное минное поле, поделенное на закрытые клетки. Одни клетки пусты, в другие заложены мины. Любую клетку можно открыть или пометить как содержащую мину. Можно пометить и пустую клетку. Если открыть клетку с миной, то игра сразу заканчивается (сапер ошибается один раз). Открыв пустую клетку, вы увидите в ней цифру (от единицы до восьмерки), равную числу мин, находящихся в восьми клетках, которые окружают открытую вами клетку. (Если открытая пустая клетка окружена клетками, также не содержащими мин, то эти пустые клетки открываются автоматически.) Цель игры – за минимальное время правильно пометить все мины и открыть все остальные клетки.

В неоткрытых клетках 12 мин. Вычислите вероятность того, что в клетке X находится мина.

Решение. 1. Определим находится ли мина в клетках *f4, f5, e3, e4, e5, d3, d5, c3, b3, a3, a1, a2, c6, c7, c8*. Значок $\frac{M}{2}$ означает, что в одной и только в одной из двух соседних ячеек находится мина.

h	-	-	-	-	-	-	-	-
g	-	-	1	2	2	1	-	-
f	-	1	3			2	-	-
e	-	1				2	-	-
d	-	2				2	1	1
c	-	1						
b	1	3				X		
a								
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**

h	-	-	-	-	-	-	-	-
g	-	-	1	2	2	1	-	-
f	-	1	3	М	М	2	-	-
e	-	1	М	М	М	2	-	-
d	-	2	Н		Н	2	1	1
c	-	1	М			Н	$\frac{M}{2}$	$\frac{M}{2}$
b	1	3	Н			X		
a	$\frac{M}{2}$	$\frac{M}{2}$	М					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**

2. Из 12 мин мы знаем расположение 8, осталось *n* = 12 - 8 = 4 мины.

2.1. Если *c*8 – мина, то в *c*5 – мина, а в *c*6, *c*7 – мин нет.

h	**-**	**-**	**-**	**-**	**-**	**-**	**-**	**-**
g	**-**	**-**	**1**	**2**	**2**	**1**	**-**	**-**
f	**-**	**1**	**3**	**М**	**М**	**2**	**-**	**-**
e	**-**	**1**	**М**	**М**	**М**	**2**	**-**	**-**
d	**-**	**2**	**Н**		**Н**	**2**	**1**	**1**
c	**-**	**1**	**М**		**М**	**Н**	**Н**	**М**
b	**1**	**3**	**Н**			**Х**		
a	$\frac{M}{2}$	$\frac{M}{2}$	**М**					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**

Пусть *C*8 – событие, состоящее в том, что в *c*8 находится мина. Тогда, $P(C8)=\frac{1}{2}$.

Пусть *B*6 – событие, состоящее в том, что в *X* находится мина. Тогда, по классическому определению вероятности $P(B6)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

По теореме о произведении вероятностей $P(C8\cdot B6)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$.

2.2. Если *c7* – мина, то в *c*5, *c*6, *c*7 – нет мин. Пусть *C*7 – событие, состоящее в том, что в *c*7 находится мина. Тогда, $P(B6)=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$.

h	**-**	**-**	**-**	**-**	**-**	**-**	**-**	**-**
g	**-**	**-**	**1**	**2**	**2**	**1**	**-**	**-**
f	**-**	**1**	**3**	**М**	**М**	**2**	**-**	**-**
e	**-**	**1**	**М**	**М**	**М**	**2**	**-**	**-**
d	**-**	**2**	**Н**		**Н**	**2**	**1**	**1**
c	**-**	**1**	**М**		**Н**	**Н**	**М**	**Н**
b	**1**	**3**	**Н**			**Х**		
a	$\frac{M}{2}$	$\frac{M}{2}$	**М**					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**

По теореме о произведении вероятностей $P(C7\cdot B6)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$.

3. **По теореме о сумме вероятностей** $P=\frac{1}{12}+\frac{1}{8}=\frac{5}{24}$.

Ответ: $\frac{5}{24}$.