0. Сколько раз встретятся часовая и минутная стрелка в период от 00:30 31 декабря 2012 года, до 00:30 1 января 2013 года.

Решение. Пусть в первый момент времени муха села на часовую стрелку и уснула на 24 часа. Тогда относительно мухи минутная стрелка повернулась 24 – 2 = 22 раза (24 круга сделала минутная стрелка, а часовая два круга. Ответ: 22 раза.

1. Четыре чёрненьких чумазеньких чертёнка чертили чёрными чернилами чертёж и выполнили эту работу за 3 часа. Если бы первый чертёнок чертил вдвое быстрее, а второй вдвое медленнее им потребовалось бы столько же времени, а если, наоборот, первый чертил бы вдвое медленнее, а второй – вдвое быстрее, то им хватило бы 2 часа.

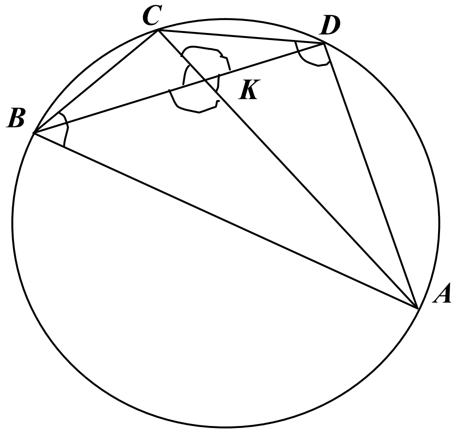
За какое время начертили бы чертёж первые 3 чертёнка без помощи четвёртого?

Решение. Пусть скорость черчения первого чертёнка v. Если он будет чертить вдвое быстрее, его скорость будет $2v$, то есть увеличится на v. Во 2-ой ситуации (скорость черчения 1-го чертёнка вдвое больше, а 2-го вдвое меньше) скорость черчения остаётся та же, значит, скорость черчения 2-го чертёнка уменьшится на v, а его начальная скорость равна $2v$. В 3-ей ситуации скорость черчения первых двух чертят $\frac{v}{2}+2v\cdot 2=4{,}5v$. Если суммарная скорость 3-го и 4-го чертёнка равна k, то начальная общая скорость черчения $3v+k$, а в третьей ситуации $4{,}5v+k$. По условию в первой ситуации скорость в 1,5 раза меньше, чем в 3-ей, значит $(3v+k)\cdot 1{,}5=4{,}5v+k$. Отсюда $k=0$. 3-ий и 4-ый чертенята не участвуют в черчении, значит без 4-го чертёнка скорость та же что и с ним. Ответ: 3 часа.

2. Можно ли заполнить таблицу, состоящую из *n* * *n* клеток так, чтобы произведение чисел каждого столбца было положительно, а каждой строки – отрицательно? Решите задачу для каждого натурального *n*.

Решение. Пусть n – чётно. Тогда ответ: да, т.к. можно заполнить первый столбец числами (– 1), а в остальные клетки поставить единицы.

Пусть n – нечётно. Тогда ответ: нет. Предположим противное. В каждом столбце стоит чётное число отрицательных чисел, следовательно, их общее число в таблице чётно, В каждой строке стоит нечётное число отрицательных чисел, следовательно их общее число в таблице – нечётно (из нечётности n). Т.к. число отрицательных чисел не может быть одновременно чётно и нечётно, то предположение не верно.



3. *ABCD* – вписанный в окружность четырехугольник, причем известно, что диагональ *AC* является биссектрисой угла *DAB*. Докажите, что $AC\cdot BD=AD\cdot DC+AB\cdot BC$.

Решение. 1. $AC\bigcap BD=K$.

2. Все отмеченные на рисунке углы равны или α, или $\pi-\alpha$, $\alpha\in(0;\ \pi)$, $\sin\alpha=\sin(\pi-\alpha)$.

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot AC \cdot \sin\alpha$, $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin\alpha$,

$S_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot DC \cdot \sin\alpha$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot AC \cdot \sin\alpha = S_{ABC} + S_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2} \cdot AD \cdot DC \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot \sin\alpha \cdot (AB \cdot BC + AD \cdot DC)$$

$AC \cdot BD = AD \cdot DC + AB \cdot BC$, что и требовалось доказать.

4. Сто гирек стоят в ряд, при этом массы любых соседних гирек различаются на 1 г. Докажите, что гирьки можно разложить на две чашки весов так, что весы будут в равновесии.

Решение. 1. Любые 4 подряд идущие гирьки можно положить на чашечные весы так, что они будут в равновесии, положив на одну чашу весом самую легкую и самую тяжёлую гири, а на другую чашу – две оставшиеся гири.

Положим все 25 четвёрок на весы так, чтобы каждая четвёрка давала равновесие, и весы также будут в равновесии.

5. Назовём трёхмерным уголком куб $2 \times 2 \times 2$, из которого вырезали угловой кубик $1 \times 1 \times 1$. Докажите, что куб размером $2^n \times 2^n \times 2^n$ с произвольно вырезанным единичным кубиком $1 \times 1 \times 1$ можно разрезать на трёхмерные уголки.

Решение. 1. Решаем методом математической индукции.

2. База при $n = 1$ верна, так как в этом случае получается единственный трёхмерный уголок.

3. Предположим, что утверждение верно при $n = k$, т.е. куб размером $2^k \times 2^k \times 2^k$ с произвольно вырезанным единичным кубиком $1 \times 1 \times 1$ можно разрезать на трёхмерные уголки.

Докажем утверждение при $n = k + 1$. Куб размером $2^{k+1} \times 2^{k+1} \times 2^{k+1}$ разобьём на 8 кубов размером $2^k \times 2^k \times 2^k$. В одном из полученных кубов $2^k \times 2^k \times 2^k$ будет вырезанный единичный кубик $1 \times 1 \times 1$, следовательно, этот куб по предположению удастся разрезать на трёхмерные уголки. Остальные 7 кубов $2^k \times 2^k \times 2^k$ разрежем, по предположению, на трёхмерные уголки так, чтобы в каждом не разрезанными остались по одному кубику $1 \times 1 \times 1$, находящиеся в центре исходного куба $2^{k+1} \times 2^{k+1} \times 2^{k+1}$. В результате в центре куба $2^{k+1} \times 2^{k+1} \times 2^{k+1}$ получим ещё один трёхмерный уголок.

Утверждение доказано, следовательно, предположение верно. Что и требовалось доказать.

6. Двое играют в "морской бой" по следующим правилам: первый игрок расставляет на полоске клетчатой бумаги размера 1 × 100 клеток произвольное количество кораблей (возможно, ни одного) размера 1 × 3 клетки (расстояние между любыми различными кораблями не менее 1 клетки). Второй указывает противнику *n* клеток ($0 \le n \le 100$), по которым он одновременно производит выстрелы, после чего про каждую из этих клеток получает сообщение "попал" или "мимо". Второй игрок выигрывает, если после этого он может однозначно указать количество кораблей противника и их расположение. При каком наименьшем *n* второй игрок может гарантировать себе выигрыш?

Решение. 1. Докажем, что среди каждых подряд идущих четырёх клеток должно быть хотя бы две, по которым производится выстрел. Предположим противное, таких клеток не более одной. Может сложиться ситуация, когда все остальные выстрелы – мимо. Тогда, если есть три подряд идущих клетки без выстрела, останется не ясным, есть там корабль или нет. А если выстрел по одной из 2-х средних клеток и это попадание, останется неясным на левых или на правых 3 клетках корабль. Следовательно, предположение не верно.

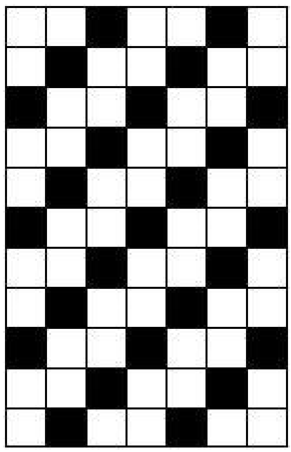
2. Выстрелов не меньше 50. Разобьём поле на 25 участков по 4 клетки. В каждый из них нужно выстрелить хотя бы 2 раза. Всего выстрелов не менее $2 \cdot 25 = 50$.

3. Будем стрелять в чётные клетки. Если между двумя промахами (или промахом и краем доски) попадание, очевидно, это попадание в центр корабля. Если 2 попадания – это попадания в края корабля, и других кораблей между промахами (т.е. клетками по которые мы стреляли, но попали мимо) нет. Трёх попаданий (т.е. клетками в которые мы стреляли и попали по кораблю) между промахами быть не может, т.к. 1-я и 2-я клетка должны принадлежать одному кораблю, а больше корабли не помещаются. Если попаданий между промахами $2n$ – единственный вариант – расположение n кораблей, а $(2n + 1)$ попадание между промахами не возможно.

Поскольку стреляя в чётные клетки, мы обнаруживаем все корабли и однозначно определяем их расположение, 50 выстрелов достаточно.

7. Имеется 77 прямоугольных брусков размером $3 \times 3 \times 1$. Можно ли ими заполнить коробку с крышкой $7 \times 9 \times 11$? Если да, то как, если нет, то почему.

Ответ: нет.



Решение. Раскрасим кубики внутри коробки (предположим, что она заполнена кубиками $1 \times 1 \times 1$) в чёрный и белый цвет следующим образом, разобьём коробку на 9 слоёв 7×11 и раскрасим каждый из слоёв, как показано на рисунке. Всего будет закрашено 225 кубиков (по 25 в каждом из 9 слоёв). Каждый брусок в любом положении будет содержать ровно три закрашенных кубика. Таким образом, в коробку поместиться не более чем 225/3 = 75 брусков, что меньше 77.

8. Есть 1000 шаров, на которых написаны числа 000, 001, 002, … ,998, 999, а также 100 корзин с надписями 00, 01, 02, … , 98, 99. Шар можно положить в корзину, если число на корзине можно получить из числа на шаре вычёркиванием цифры. Докажите, что все шары можно положить в 50 корзин.

Решение. Возьмём корзины, разность цифр на которых чётна. Очевидно их 50. Докажем, что любой шар можно положить хотя бы в одну из них. Пусть число на шаре $\overline{ABC}$, если $B - A$ или $C - B$ чётно, то шар можно положить соответственно в корзину $\overline{AB}$ или $\overline{BC}$. Если же и $B - A$ и $C - B$ нечётные числа, то их сумма $(C - A)$ – чётна, и шар можно положить в корзину $\overline{AC}$.