ПОЛУФИНАЛ А, 19.04.2014

1. На шахматной доске $n \times n$ $(n \geq 2)$ расставлены фигуры так, что на каждой горизонтали и вертикали стоит не менее 2 фигур. При каких *n* всегда можно снять с доски несколько фигур так, чтобы на каждой горизонтали и вертикали осталась ровно 1 фигура?

2. Существует ли 100-значное число, делящееся на 2^{100} и состоящее только из цифр 1 и 2 в своей десятичной записи?

3. Могут ли 7 кругов радиуса 1 покрыть круг радиуса 2 (круги рассматриваются вместе с границей)? Могут ли 7 кругов радиуса 1 покрыть некий круг радиуса больше 2?

4. В турнире по футболу участвовало 6 команд. Каждая команда сыграла с каждой ровно один раз. После чего в турнирной таблице сложилась интереснейшая ситуация: каждая команда набрала на 2 очка больше, чем предыдущая (за победу в футболе начисляют 3 очка, за ничью – 1 очко, за проигрыш – 0). Сколько очков набрала команда-победитель? Составьте итоговую таблицу турнира.

5. Имеется 14 монет. Фальшивые монеты весят одинаково, настоящие весят одинаково, и фальшивые легче настоящих. В распоряжении эксперта чашечные весы без гирь. Эксперт по внешнему виду определил, что монеты с 1-й по 7-ю – фальшивые, а с 8-й по 14-ю – настоящие. Как ему доказать этот факт с помощью 3-х взвешиваний?

6. Внутри окружности ω расположены окружности ω_1 и ω_2 каждая из которых касается окружности ω. Сумма радиусов окружностей ω_1 и ω_2 равна радиусу окружности ω. Окружности ω_1 и ω_2 касаются друг друга внешним образом. Прямая *a* последовательно пересекает окружность ω_1 в точках *A* и *B*, окружность ω_2 в точках *C* и *D*, окружность ω в точке *E*. Известно, что *BD* = *CE*. Докажите, что точка *A* принадлежит окружности ω.

7. Упростите выражение

$$\frac{(a_0-a_2)(a_0-a_3)\dots(a_0-a_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\dots(a_1-a_n)}+\frac{(a_0-a_1)(a_0-a_3)\dots(a_0-a_n)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\dots(a_2-a_n)}+\dots+\frac{(a_0-a_1)(a_0-a_2)\dots(a_0-a_{n-1})}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\dots(a_n-a_{n-1})}-1$$

для каждого $n \geq 2014$.

8. В стране 2014 города, и из каждого выходит не менее 91-й дороги. Известно, что из любого города можно проехать по дорогам в любой другой. Докажите, что это можно сделать не более, чем с 62 пересадками. (Дорога соединяет между собой два города. Два города не может соединять более одной дороги.)