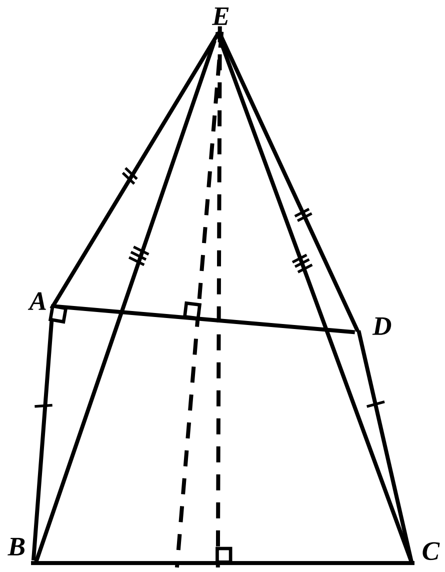
ЧЕТВЕРТЬФИНАЛ, 17.04.2014

1. На свой день рождения Фрекен Бок испекла огромный торт. Известно, что Малыш и торт весили столько же, сколько Карлсон и Фрекен Бок. После того, как торт съели, Карлсон весил столько же, сколько Фрекен Бок и Малыш. Докажите, что кусок торта, который съел Карлсон, весит столько же, сколько весила Фрекен Бок до праздника.

2. В шахматном турнире приняли участие 2 школьника и несколько студентов. Вместе оба школьника набрали 6,5 очков, а все студенты – поровну. Сколько студентов участвовало в турнире? В шахматах за победу даётся 1 очко, ничья – 0,5 очка, проигрыш – 0 очков. Каждый участник турнира играл с каждым ровно один раз.



3. На рисунке изображён четырёхугольник *ABCD*, у которого *AB* = *CD*, углы *B* и *C* – острые, а угол *BAD* – прямой. Сумма углов четырехугольника равна 360°, значит угол *ADC* тупой. Проведём серединные перпендикуляры к *AD* и ВС до их пересечения в точке *E*. По свойству серединного перпендикуляра *AE* = *DE* и *BE* = *CE*. Треугольники *ABE* и *DCE* равны по трём сторонам. Следовательно, равны и соответствующие углы: $\angle BAE = \angle CDE$. Но так как *AE* = *DE*, то треугольник *AED* равнобедренный, поэтому углы при его основании равны: $\angle ADE = \angle DAE$. Получим, что $\angle ADC = \angle CDE - \angle ADE = \angle BAE - \angle DAE = \angle BAD$. Итак, тупой угол равен прямому. В чём причина противоречия?

4. По кругу расставлены *n* различных чисел. За один шаг разрешается поменять местами числа, расположенные через одно число (например, третье и пятое числа). Укажите все случаи первоначальной расстановки, при которых через несколько шагов удастся расположить все числа в порядке возрастания (по часовой стрелке или против неё). Опишите стратегии упорядочения чисел.

5. Обозначим через a_n целое число ближайшее к $\sqrt{n}$. Найдите сумму $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_{2014}}$.

6. В выпуклом четырёхугольнике *ABCD* нашлась такая точка *O*, что основания перпендикуляров, опущенных из точки *O* на стороны четырёхугольника, обозначим как *P, Q, R, S*. Точки *P, Q, R, S* разбивают стороны четырёхугольника на части, удовлетворяющие условиям *DP* ≥ *PA*, *AQ* ≥ *QB*, *BR* ≥ *RC*, *CS* ≥ *SD*. Докажите, что *O* – центр описанной около *ABCD* окружности.

7. Летучая ладья ходит как обычная, только не может становиться на соседнюю клетку. Может ли она пройти по доске 4 × 4, побывав на каждой ее клетке ровно один раз?

8. В парламенте у каждого депутата не более трёх врагов. Докажите, что парламент можно разделить на две палаты так, чтобы у каждого депутата было не более одного врага в своей палате (если *A* – враг *B*, то и *B* – враг *A*).