Матбои-2015, финал, 26.04.2015

1. В 2115 году на олимпиаде «Уникум» (для третьих, четвёртых, пятых и шестых классов) жюри планирует для каждого класса подготовить набор из 10 задач. В каждой параллели две задачи будут уникальны (они не повторяются в других параллелях). Остальные задачи будут встречаться не менее чем в трёх из четырех классов. Какое максимальное число различных задач могло в совокупности быть в вариантах?

2. В любом ли параллелограмме через точку пересечения его диагоналей можно провести прямую так, чтобы из частей, на которые она разобьёт параллелограмм, можно было сложить ромб?

3. Для многочлена $(4+3x)^{2015}$ найдите:

а) среднее арифметическое всех числовых коэффициентов многочлена, полученных после возведения его в степень и приведения подобных слагаемых;

б) наименьший из числовых коэффициентов многочлена, полученных после возведения его в степень и приведения подобных слагаемых;

в) наибольший из числовых коэффициентов многочлена, полученных после возведения его в степень и приведения подобных слагаемых.

***Справочная информация.* Бином Ньютона – это формула**

$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + ... + C_n^{n-1} ab^{n-1} + b^n$**, где** $C_n^m = \dfrac{n!}{m!\cdot(n-m)!}$ **– биномиальные коэффициенты,**

***n* – натуральное число.**

4. На окружности лежат 10 белых и 10 чёрных камней. Докажите, что среди всех 20 троек подряд лежащих камней, троек, где белых больше, не более 15.

5. Имеется бесконечная последовательность натуральных чисел, в которой $a_1 = 1$, а любое a_{i+1} или равно a_i, или больше его на 1. В рассматриваемой последовательности есть число *m* такое, что $a_m = \dfrac{m}{20}$. Докажите, что в последовательности найдётся такое *n*, что $a_n = \dfrac{n}{15}$.

6. В основании правильной четырёхугольной пирамиды *ABCDM* лежит квадрат *ABCD* со стороной 2 м, высота пирамиды равна $\sqrt{6+4\sqrt{3}}$ м. На ребре *AM* пирамиды отмечена точка *N*, делящая ребро *AM* в отношении 1 : 3 считая от вершины *M*. Муравей решил отправиться в путешествие по боковым граням пирамиды *ABCDM* от точки *A* до точки *N*, причем во время путешествия он посетил по одной внутренней точке каждого из боковых рёбер пирамиды. Какой минимальный путь преодолел муравей?

7. Дан выпуклый четырёхугольник *ABCD*. На его сторонах *AB* и *DC* взяты соответственно точки *M* и *N* так, что $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{DN}{NC}$. Площади треугольников *ABN* и *DCM* равны. Докажите, что *BC* || *AD*.

8. В стране Липляндия 10 000 городов. Некоторые города соединены дорогами, причем вне городов дороги не пересекаются. Из каждого города в каждый можно добраться одним единственным способом, причем проехав при этом не более чем через 2015 городов. Какое минимальное число дорог между некоторыми парами городов нужно построить, чтобы из каждого города в каждый можно было гарантированно добраться, проехав при этом не более чем через 2014 городов? Вновь построенные дороги также вне городов не пересекаются.

Матбои-2015, финал, 26.04.2015

1. В 2115 году на олимпиаде «Уникум» (для третьих, четвёртых, пятых и шестых классов) жюри планирует для каждого класса подготовить набор из 10 задач. В каждой параллели две задачи будут уникальны (они не повторяются в других параллелях). Остальные задачи будут встречаться не менее чем в трёх из четырех классов. Какое максимальное число различных задач могло в совокупности быть в вариантах?

2. В любом ли параллелограмме через точку пересечения его диагоналей можно провести прямую так, чтобы из частей, на которые она разобьёт параллелограмм, можно было сложить ромб?

3. Для многочлена $(4+3x)^{2015}$ найдите:

а) среднее арифметическое всех числовых коэффициентов многочлена, полученных после возведения его в степень и приведения подобных слагаемых;

б) наименьший из числовых коэффициентов многочлена, полученных после возведения его в степень и приведения подобных слагаемых;

в) наибольший из числовых коэффициентов многочлена, полученных после возведения его в степень и приведения подобных слагаемых.

***Справочная информация.* Бином Ньютона – это формула**

$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + ... + C_n^{n-1}ab^{n-1} + b^n$**, где** $C_n^m = \dfrac{n!}{m!\cdot(n-m)!}$ **– биномиальные коэффициенты,**

***n* – натуральное число.**

4. На окружности лежат 10 белых и 10 чёрных камней. Докажите, что среди всех 20 троек подряд лежащих камней, троек, где белых больше, не более 15.

5. Имеется бесконечная последовательность натуральных чисел, в которой $a_1 = 1$, а любое a_{i+1} или равно a_i, или больше его на 1. В рассматриваемой последовательности есть число *m* такое, что $a_m = \dfrac{m}{20}$. Докажите, что в последовательности найдётся такое *n*, что $a_n = \dfrac{n}{15}$.

6. В основании правильной четырёхугольной пирамиды *ABCDM* лежит квадрат *ABCD* со стороной 2 м, высота пирамиды равна $\sqrt{6+4\sqrt{3}}$ м. На ребре *AM* пирамиды отмечена точка *N*, делящая ребро *AM* в отношении 1 : 3 считая от вершины *M*. Муравей решил отправиться в путешествие по боковым граням пирамиды *ABCDM* от точки *A* до точки *N*, причем во время путешествия он посетил по одной внутренней точке каждого из боковых рёбер пирамиды. Какой минимальный путь преодолел муравей?

7. Дан выпуклый четырёхугольник *ABCD*. На его сторонах *AB* и *DC* взяты соответственно точки *M* и *N* так, что $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{DN}{NC}$. Площади треугольников *ABN* и *DCM* равны. Докажите, что *BC* || *AD*.

8. В стране Липляндия 10 000 городов. Некоторые города соединены дорогами, причем вне городов дороги не пересекаются. Из каждого города в каждый можно добраться одним единственным способом, причем проехав при этом не более чем через 2015 городов. Какое минимальное число дорог между некоторыми парами городов нужно построить, чтобы из каждого города в каждый можно было гарантированно добраться, проехав при этом не более чем через 2014 городов? Вновь построенные дороги также вне городов не пересекаются.