Матбои-2015, полуфинал Б, 25.04.2015

1. Найдите все натуральные трёхзначные числа, сумма цифр которых равна 18, а сумма квадратов цифр делится на 3, но не делится на 9.

2. В клетки квадрата 7 * 7 расставлены натуральные числа так, что числа в каждой строке образуют в порядке слева направо возрастающие арифметические прогрессии, числа в каждом столбце также образуют в порядке сверху вниз возрастающие арифметические прогрессии. Чему может равняться сумма всех чисел в таблице?

3. У мамы было 5 сыновей: Андрей, Борис, Владимир, Григорий и Дмитрий. Один из сыновей, когда мамы не было дома, испёк пирог. «Как вкусно пахнет! Чья это работа?» – спросила мама.

На что Андрей ответил: «Это Борис или Владимир».

Борис: «Это сделал не я и не Дмитрий».

Владимир: «Вы оба пошутили».

Григорий: «На самом деле один из них сказал правду, а другой – нет».

Дмитрий: «Григорий, ты ошибся».

«Вы меня совсем запутали», – сказала мама. – «Кому из вас можно верить?»

«Трое из нас точно сказали правду» – ответили братья (и это действительно правда). Кто испек пирог?

4. Про квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ (a, b, c – действительные, $a \neq 0$) известно, что на отрезке [0; 1] его значения не превышают по модулю 1. Найдите наибольшее возможное значение суммы $|a| + |b| + |c|$.

5. Имеется два подобных треугольника. Каждый из них разрезали на две треугольные части. Оказалось, одна часть первого треугольника подобна одной из частей второго треугольника. Верно ли, что две другие части подобны друг другу?

6. В вершинах куба расставлены восемь положительных чисел, сумма которых равна 2. На каждом ребре написано произведение чисел, стоящих в его концах. Докажите, что сумма чисел записанных на рёбрах меньше 1.

7. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2+(z-9)^2}+\sqrt{(x+1)^2+(y+4)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y-6)^2}+\sqrt{(x-5)^2+(y-5)^2}+$$
$$+\sqrt{(x-7)^2+(y+6)^2}$$

. Определите, при каких значениях (x; y; z) оно достигается.

8. Докажите, что, при любом натуральном n, из произвольных ($2^{n+1} - 1$) натуральных чисел, можно выбрать 2^n числа, сумма которых будет кратна 2^n.

Матбои-2015, полуфинал Б, 25.04.2015

1. Найдите все натуральные трёхзначные числа, сумма цифр которых равна 18, а сумма квадратов цифр делится на 3, но не делится на 9.

2. В клетки квадрата 7 * 7 расставлены натуральные числа так, что числа в каждой строке образуют в порядке слева направо возрастающие арифметические прогрессии, числа в каждом столбце также образуют в порядке сверху вниз возрастающие арифметические прогрессии. Чему может равняться сумма всех чисел в таблице?

3. У мамы было 5 сыновей: Андрей, Борис, Владимир, Григорий и Дмитрий. Один из сыновей, когда мамы не было дома, испёк пирог. «Как вкусно пахнет! Чья это работа?» – спросила мама.

На что Андрей ответил: «Это Борис или Владимир».

Борис: «Это сделал не я и не Дмитрий».

Владимир: «Вы оба пошутили».

Григорий: «На самом деле один из них сказал правду, а другой – нет».

Дмитрий: «Григорий, ты ошибся».

«Вы меня совсем запутали», – сказала мама. – «Кому из вас можно верить?»

«Трое из нас точно сказали правду» – ответили братья (и это действительно правда). Кто испек пирог?

4. Про квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ (a, b, c – действительные, $a \neq 0$) известно, что на отрезке [0; 1] его значения не превышают по модулю 1. Найдите наибольшее возможное значение суммы $|a| + |b| + |c|$.

5. Имеется два подобных треугольника. Каждый из них разрезали на две треугольные части. Оказалось, одна часть первого треугольника подобна одной из частей второго треугольника. Верно ли, что две другие части подобны друг другу?

6. В вершинах куба расставлены восемь положительных чисел, сумма которых равна 2. На каждом ребре написано произведение чисел, стоящих в его концах. Докажите, что сумма чисел записанных на рёбрах меньше 1.

7. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2+(z-9)^2}+\sqrt{(x+1)^2+(y+4)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y-6)^2}+\sqrt{(x-5)^2+(y-5)^2}+$$
$$+\sqrt{(x-7)^2+(y+6)^2}$$ **. Определите, при каких значениях (x; y; z) оно достигается.**

8. Докажите, что, при любом натуральном n, из произвольных ($2^{n+1} - 1$) натуральных чисел, можно выбрать 2^n числа, сумма которых будет кратна 2^n.