**Матбои-2015, полуфинал А, 25.04.2015**

**1. Найдите все натуральные трёхзначные числа, сумма цифр которых равна 18, а сумма квадратов цифр делится на 3, но не делится на 9.**

**2. В клетки квадрата ($2k$ + 1) * ($2k$ + 1) расставлены натуральные числа так, что числа в каждой строке образуют в порядке слева направо возрастающие арифметические прогрессии, числа в каждом столбце также образуют в порядке сверху вниз возрастающие арифметические прогрессии. Чему может равняться сумма всех чисел в таблице?**

**3. Про квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ ($a$, $b$, $c$ – действительные, $a \neq 0$) известно, что на отрезке [0; 1] его значения не превышают по модулю 1. Найдите наибольшее возможное значение суммы $|a| + |b| + |c|$.**

**4. Существует ли шестиугольник, который нельзя одной прямой разбить на два четырёхугольника? Ответ обоснуйте.**

**5. Доказать, что, при любом натуральном $n$, из произвольных ($2^{n+1} - 1$) натуральных чисел, можно выбрать $2^n$ числа, сумма которых будет кратна $2^n$.**

**6. В вершинах куба расставлены восемь положительных чисел, сумма которых равна 2. На каждом ребре написано произведение чисел, стоящих в его концах. Докажите, что сумма чисел записанных на рёбрах меньше 1.**

**7. Найдите наименьшее значение выражения**

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2+(z-9)^2}+\sqrt{(x+1)^2+(y+4)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y-6)^2}+\sqrt{(x-5)^2+(y-5)^2}+$$
$$+\sqrt{(x-7)^2+(y+6)^2}$$

**. Определите, при каких значениях ($x$; $y$; $z$) оно достигается.**

**8. Из точки $O$ проведено три луча, образующие между собой острые углы. На первом луче взята точка $A$ и на $OA$ как на диаметре построена полуокружность, пересекающая два других луча. На третьем луче отложен отрезок $OB = OA$ и на $OB$ построена полуокружность, пересекающая два других луча. Докажите, что сумма квадратов расстояний от $A$ и $B$ до среднего луча меньше квадрата расстояния от $A$ до $OB$.**

**Матбои-2015, полуфинал А, 25.04.2015**

**1. Найдите все натуральные трёхзначные числа, сумма цифр которых равна 18, а сумма квадратов цифр делится на 3, но не делится на 9.**

**2. В клетки квадрата $(2k + 1) * (2k + 1)$ расставлены натуральные числа так, что числа в каждой строке образуют в порядке слева направо возрастающие арифметические прогрессии, числа в каждом столбце также образуют в порядке сверху вниз возрастающие арифметические прогрессии. Чему может равняться сумма всех чисел в таблице?**

**3. Про квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ ($a$, $b$, $c$ – действительные, $a \neq 0$) известно, что на отрезке [0; 1] его значения не превышают по модулю 1. Найдите наибольшее возможное значение суммы $|a| + |b| + |c|$.**

**4. Существует ли шестиугольник, который нельзя одной прямой разбить на два четырёхугольника? Ответ обоснуйте.**

**5. Доказать, что, при любом натуральном $n$, из произвольных $(2^{n+1} - 1)$ натуральных чисел, можно выбрать $2^n$ числа, сумма которых будет кратна $2^n$.**

**6. В вершинах куба расставлены восемь положительных чисел, сумма которых равна 2. На каждом ребре написано произведение чисел, стоящих в его концах. Докажите, что сумма чисел записанных на рёбрах меньше 1.**

**7. Найдите наименьшее значение выражения**

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2+(z-9)^2}+\sqrt{(x+1)^2+(y+4)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y-6)^2}+\sqrt{(x-5)^2+(y-5)^2}+$$
$$+\sqrt{(x-7)^2+(y+6)^2}$$

**. Определите, при каких значениях $(x; y; z)$ оно достигается.**

**8. Из точки $O$ проведено три луча, образующие между собой острые углы. На первом луче взята точка $A$ и на $OA$ как на диаметре построена полуокружность, пересекающая два других луча. На третьем луче отложен отрезок $OB = OA$ и на $OB$ построена полуокружность, пересекающая два других луча. Докажите, что сумма квадратов расстояний от $A$ и $B$ до среднего луча меньше квадрата расстояния от $A$ до $OB$.**