

Матбои-2015, 18.04.2015, четвертьфинал



1. Из трёх утверждений:

- 1) число $A + 10$ – квадрат натурального числа;
- 2) число A заканчивается на 8;
- 3) число $(A - 79)$ – квадрат натурального числа.

Неверно ровно одно. Найдите A .

2. Имеются положительные числа: a, b, c , причём известно, что $a \geq b \geq c$, и $a + b + c \leq 1$. Докажите, что $a^2 + 3b^2 + 5c^2 \leq 1$.

3. На главной площади города Киноград расположены 6 кинотеатров, сеансы в которых начинаются в 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24 часа. 7 друзей в воскресенье побывали на всех сеансах (из-за близкого расположения кинотеатров можно было успевать на соседние сеансы в разные кинотеатры). Причём на каждый сеанс трое из них шли в один кинотеатр, а четверо в другой (группы могли меняться), причём к концу дня каждый из друзей побывал в каждом кинотеатре. Могло ли получиться так, что в одном из кинотеатров на каждом сеансе присутствовал кто-то из друзей?

4. С натуральным числом X можно производить 2 операции:

- 1) удваивать его;
- 2) переставлять цифры произвольным образом (ноль не может быть первой цифрой слева).

Можно ли при $X = 7$ получить в какой-то момент 811?

5. Белоснежка и некоторое количество гномов (большее нуля) любят лепить глиняные игрушки. За неделю каждый гном лепит определённое целое число поделок (одинаковое для каждого из гномов), а Белоснежка на 7 больше, чем все они (включая её саму) в среднем (что также является целым числом). Чему может быть равно количество гномов?

6. Имеется 13 монет. Известно, что одна из них фальшивая и отличается по весу от остальных (какая неизвестно). Можно ли за 3 взвешивания определить, что это за монета, а также выяснить, легче она или тяжелее настоящих монет?

7. В пирамиде $ABCD$, точки M и N являются, соответственно, серединами ребер BC и AD . Найдите угол между прямыми AC и BD , если $AC = 16$ см, $BD = 12$ см, $MN = 10$ см.

8. На большем основании CD трапеции $ABCD$ взята произвольная точка N . Через точку N проведены прямые a и b параллельные диагоналям трапеции. Прямая a , параллельная диагонали AC , пересекает отрезки AD и BD в точках E и P соответственно. Прямая b , параллельная диагонали BD , пересекает отрезки BC и AC в точках F и Q соответственно. Прямая EF , пересекает диагонали BD и AC в точках M и L соответственно. Докажите равенство треугольников EPM и LQF .

Матбои-2015, 18.04.2015, четвертьфинал



1. Из трёх утверждений:

- 1) число $A + 10$ – квадрат натурального числа;
- 2) число A заканчивается на 8;
- 3) число $(A - 79)$ – квадрат натурального числа.

Неверно ровно одно. Найдите A .

2. Имеются положительные числа: a, b, c , причём известно, что $a \geq b \geq c$, и $a + b + c \leq 1$. Докажите, что $a^2 + 3b^2 + 5c^2 \leq 1$.

3. На главной площади города Киноград расположены 6 кинотеатров, сеансы в которых начинаются в 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24 часа. 7 друзей в воскресенье побывали на всех сеансах (из-за близкого расположения кинотеатров можно было успевать на соседние сеансы в разные кинотеатры). Причём на каждый сеанс трое из них шли в один кинотеатр, а четверо в другой (группы могли меняться), причём к концу дня каждый из друзей побывал в каждом кинотеатре. Могло ли получиться так, что в одном из кинотеатров на каждом сеансе присутствовал кто-то из друзей?

4. С натуральным числом X можно производить 2 операции:

- 1) удваивать его;
- 2) переставлять цифры произвольным образом (ноль не может быть первой цифрой слева).

Можно ли при $X = 7$ получить в какой-то момент 811?

5. Белоснежка и некоторое количество гномов (больше нуля) любят лепить глиняные игрушки. За неделю каждый гном лепит определённое целое число поделок (одинаковое для каждого из гномов), а Белоснежка на 7 больше, чем все они (включая её саму) в среднем (что также является целым числом). Чему может быть равно количество гномов?

6. Имеется 13 монет. Известно, что одна из них фальшивая и отличается по весу от остальных (какая неизвестно). Можно ли за 3 взвешивания определить, что это за монета, а также выяснить, легче она или тяжелее настоящих монет?

7. В пирамиде $ABCD$, точки M и N являются, соответственно, серединами ребер BC и AD . Найдите угол между прямыми AC и BD , если $AC = 16$ см, $BD = 12$ см, $MN = 10$ см.

8. На большем основании CD трапеции $ABCD$ взята произвольная точка N . Через точку N проведены прямые a и b параллельные диагоналям трапеции. Прямая a , параллельная диагонали AC , пересекает отрезки AD и BD в точках E и P соответственно. Прямая b , параллельная диагонали BD , пересекает отрезки BC и AC в точках F и Q соответственно. Прямая EF , пересекает диагонали BD и AC в точках M и L соответственно. Докажите равенство треугольников EPM и LQF .