Департамент образования города Липецка
МАОУ ДОД Центр дополнительного образования детей
«Стратегия»

Математика 7

Учебно-методическое пособие

Липецк – 2012

Содержание

Предисловие

Размышления над задачами развивают интеллект, сообразительность, способствуют повышению уровня математической грамотности.

Настоящее пособие предназначено для учащихся 7 классов школ, лицеев, гимназий, которые желают самостоятельно подготовиться к олимпиадам, прежде всего школьным и муниципальным. Оно составлено в соответствии с программой дистанционного обучения очно-заочной школы «Одаренный ребенок».

При этом под олимпиадными задачами понимаются задачи, при решении которых используются специальные методы: принцип Дирихле, метод инвариантов, решение уравнений в целых числах и другие.

Пособие состоит из 12 модулей. Каждый из них посвящен рассмотрению какого-либо метода решения олимпиадных задач. В начале модуля приводятся некоторые положения теории, затем – решения нескольких задач, завершается модуль задачами для самостоятельного решения.

В конце пособия ко всем задачам приведены ответы и решения.

Читателям желаем успеха!

Модуль 1
Олимпиадные задачи. Примеры

Задачи модуля
1. Анализ особенностей олимпиадных задач по математике.
2. Развитие интереса к изучению математики.

---

1. Теоретический материал
1.1 Олимпиадные задачи по математике

Олимпиадные задачи в математике – это задачи повышенной трудности, нестандартные как по условию, так и по методам решения.

Единого метода решения олимпиадных задач не существует. Некоторые задачи можно решить несколькими различными методами или комбинацией методов. Характерная особенность олимпиадных задач в том, что решение с виду несложной проблемы может потребовать применения методов, использующихся в серьёзных математических исследованиях.

2. Примеры задач

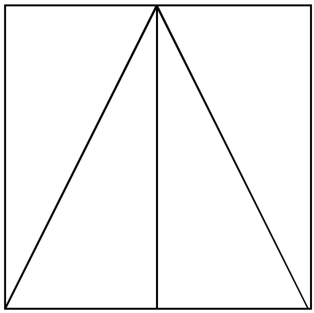
Задача 1.

(*Муниципальный этап олимпиады по математике, декабрь 2007 г.*)

Как разрезать квадрат на четыре одинаковые части тремя сквозными прямолинейными разрезами, среди которых нет параллельных и перпендикулярных?

Решение.

Например, так, как на рисунке



Задача 2.

На доске написаны числа от 1 до 10. Разрешается стереть любые два числа x и y, а вместо них записать на доску числа x-1 и y+3. Могли ли через некоторое время на доске оказаться числа 2, 3, …, 9, 10, 2010?

Решение.

Предположим, что мы смогли получить на доске числа 2, 3, …, 9, 10, 2002. Заметим, что после каждой операции сумма чисел, написанных на доске, увеличивается на 2. Изначально она была равна 55 (1+2+…+9+10). То есть после каждой операции сумма чисел, написанных на доске, будет нечетной. Однако сумма 2+3+…+10+2010=2064 четна. Противоречие.

Ответ: не могли.

Задача 3.

В школе пять седьмых классов. В каждом из них учатся по 32 человека. Докажите, что найдутся 14 человек, родившихся в один месяц.

Доказательство.

Предположим, что в каждом месяце родилось не более 13 учеников. Значит за 12 месяцев родилось не более 13•12=156 школьников. А по условию 5•32=160 учащихся в седьмых классах. Получили противоречие. Значит, найдется месяц, в котором родилось больше, чем 13 учеников, т.е. хотя бы 14.

3. Домашнее задание

Задача 1.

Нарисуйте на плоскости пять различных прямых так, чтобы они пересекались ровно в семи различных точках.

Задача 2.

В трехзначном числе последняя цифра 3. Если ее переставить на начало числа, то получится число, которое будет на 1 больше, чем утроенное первоначальное число. Найдите начальное число.

Задача 3.

В школе 30 классов и 1000 учащихся. Докажите, что есть класс, в котором не менее 34 учеников.

Модуль 2
Числа и вычисления. Числовые ребусы

Задачи модуля

1. Ознакомиться с некоторыми особенностями числовых ребусов.
2. Развитие умения рассуждать.
3. Формирование интереса к математике.

1. Теоретический материал

1.1. Числовые ребусы

К числовым ребусам можно отнести арифметические равенства. В последних все или некоторые цифры заменены буквами (или значками в числовых ребусах) какого-либо одного или различных алфавитов (включая системы счисления). Подобные ребусы представляют собой логико-математические задачи, в которых путем логических рассуждений и математических вычислений требуется расшифровать значение каждого символа и восстановить числовую запись. Причем перемена цифр (букв) чисел слева от равенства между собой, как правило, не является новым решением (при отсутствии ограничений).

Можно выделить три основных типа ребусов, представленных в виде произведения, арифметической суммы, степени. Для каждого типа ребусов имеются некоторые общие правила их дешифровки.

При решении ребусов, представленных в виде *произведения*, необходимо учитывать:

1. Нуль не может быть первой цифрой (ведущим).

2. Если при умножении некоторого числа на однозначное получено исходное число, то множитель равен единице.

3. Если при умножении некоторого числа, не оканчивающегося на нуль, на некоторое однозначное число, получен нуль в младшем разряде произведения, то младший разряд множимого и множителя есть пара чисел, одно из которых 5, а другое - число четное.

4. Если при умножении некоторого двузначного числа на некоторое однозначное число, большее 5, полученное произведение - двузначное число, тогда первая цифра множимого равна единице.

5. Произведение некоторого числа, не оканчивающегося на нуль, на некоторое нечетное число дает последнюю цифру (букву), равную последней цифре множимого тогда, когда цифра равна 5.

6. Произведение некоторого числа, не оканчивающегося на нуль, на некоторое число, последняя цифра которого равна последней цифре (букве) множимого, дает число, последняя цифра которого равна **5** или **1**.

Например, найти все решения ребуса ***РЕ•ШЕ=НИЕ.***

1) 1**5•25**=37**5**; 2) 2**5•35**=67**5**; 3) 1**5•65**=97**5**; 4) 2**1•31**=65**1.**

При расшифровке числовых ребусов имеется много других закономерностей, связанных с их особенностями. Без системного и целенаправленного перебора, как правило, решения не находятся. Причем число рассматриваемых вариантов зависит от уровня, умений и навыков логико-математической подготовки, изобретательности и сообразительности ученика.

Основные из этих закономерностей связаны с исходными цифрами множимого и множителя:

а) 2•К (К от единицы до четырех включительно) – не дает переноса, *например*, **МЕ•ДВ=ЕДЕВ.** *Решение:* **41•32=1312.**

б) 2•6=2 – дает перенос, *например*, **РА•М=КА.** *Решение*: 12•6=72.

Способы решения ребусов, представленных в виде *суммы:*

1. Метод уравновешивания с использованием табличного способа оформления логических дедуктивных умозаключений (рассуждений). Метод основан на решении уравнения в неотрицательных целых различных числах (буквах), как правило, отличных от нуля. Эквивалентное (исходному уравнению) уравнение получается переносом всех неизвестных в левую часть уравнения в порядке убывания абсолютных величин коэффициентов. Коэффициенты подбираются таким образом, чтобы левая часть уравнения была наиболее близка к нулю. При этом коэффициенты для различных букв должны различаться.

2. Метод постепенного изменения букв в порядке возрастания коэффициентов. При этом целесообразно использовать табличный способ оформления логических заключений.

3. Метод наибольшего общего делителя (НОД). Метод применяется, если только наименьший из коэффициентов не равен 1. Метод используется совместно с методом постепенного изменения значения букв в порядке возрастания коэффициентов.

Очевидно, что получаемая сумма должна делиться на НОД коэффициентов при последующих слагаемых. При небольшом числе итераций по изменению значения букв (отбрасывания бесперспективных вариантов) и построении новой таблицы (изменением части первоначальной таблицы) получаем искомое решение.

Аналогичные способы решения ребусов применимы и для класса числовых ребусов, в которых для кодирования цифр применяется не буквенный символ (значок), заменяющий любую букву (чаще всего звездочка). Большинство задач этого класса представляют собой ребусы в виде произведения чисел, в которых требуется вместо звездочек подставить цифры. Решение этого класса ребусов требует, очевидно, меньшего количества логических высказываний (вариантов перебора), так в ребусе уже приведены некоторые цифры, упрощающее нахождение единственного решения.

Например, **РА•М=КА** имеет следующие решения (без ограничивающих дополнительных условий) с использованием рассмотренных выше способов для ребусов, представленных в виде произведения: 1) 12•6=72; 2) 15•3=45.

Аналогичный по формату числовой ребус ****•6=*2** имеет только один вариант решения. Логика и используемые способы решения:

1) шесть больше пяти, поэтому число десятков множимого равно единице; 2) число единиц множимого равно 2, так как если оно было бы равно 7 (7•6=42), то в этом случае имели бы: 17•6=102, то есть число трехзначное, что противоречит условию. Итак, решение: **12•6=72.**

Пример 1.

В данном примере восстанови цифры, обозначенные звездочками:

8

<u>4*2</u>

7**

3**

<u>****</u>

*****0

Решение.

Так как на конце результата цифра 0, то первый множитель оканчивается цифрой 5 или нулем, ибо при умножении на 2 нуль может получиться только от умножения 5 или нуля. По цифре 7 и множителю 2 определяем, что первый множитель начинается с цифры 3. По второму неполному произведению определяем, что вторая цифра второго множителя 1. Итак, первый множитель 385, второй 412 или первый 380, а второй 412.

Пример 2.

В примере на сложение четырехзначных чисел

МЕТР+МЕТР=ГРАММ

одинаковые цифры зашифрована одинаковыми буквами, а разные - разными. Найдите все возможные расшифровки и объясните, почему других вариантов нет.

Решение.

Запишем в столбик

$$\begin{array}{r} \text{МЕТР} \\ + \\ \underline{\text{МЕТР}} \\ \text{ГРАММ} \end{array}$$

Поскольку сумма Р+Р оканчивается на цифру М, то цифра М четна. На М оканчивается также либо сумма Т+Т, если при сложении не было переноса единицы в разряд десятков, либо сумма Т+Т+1, если таковой перенос был. Но последнее невозможно, т.к. 2Т+1 нечетно.

Поэтому 2Р=М и 2Т=10+М. Заметим, что М≥5, иначе сумма МЕТР+МЕТР не будет пятизначной. Значит, М=6 или М=8. Если М=6, то Р=3 и Т=8. Получаем 6Е83+6Е83=13А66. При сложении есть перенос в разряд тысяч. Поэтому Е≥5. Так как цифры 6 и 8 заняты, то Е=5, 7 или 9. Подстановкой убеждаемся, что Е=7.

Если М=8, то не получаем верного равенства.

Итак, ответ один: 6783+6783=13566.

Пример 3.

Расшифровать равенство **+***=****, если известно, что оба слагаемых и сумма не изменяется, если все эти три числа прочитать справа налево.

Решение.

Из условия обращаемости чисел имеем $\overline{aa} + \overline{вcв} = \overline{peep}$, ясно, что *в*=9, так как иначе не получим четырехзначное число; *р*=1, тогда *а*=2, *с*=7, *е*=0. Итак, 22+979=1001.

2. Домашнее задание

Задача 1.

Произведение первой цифры числа на оставшуюся часть равно 57, а произведение последней цифры на оставшуюся часть числа равно 105. Найдите это число.

Задача 2.

Какие цифры нужно поставить вместо А, В, С, Д в примере на сложение АВСД+АВС+АВ+А=4321.

Задача 3.

Из какого наименьшего числа «елок» может состоять «лесок»:

ЕЛКА+ … +ЕЛКА=ЛЕСОК

(одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными буквами разные)?

Модуль 3
Четные и нечетные числа

Задачи модуля

1. Ознакомиться с некоторыми свойствами четности.
2. Развитие умения рассуждать.
3. Развитие навыков поиска идеи решения задачи.

---

1. Теоретический материал

Известно, что целые числа бывают четными и нечетными. Четные числа можно записать в виде $2k$, где k - целое число, а нечетные – в виде $2k+1$ или $2k-1$.

Применение идеи четности и нечетности для решения олимпиадных задач основано на двух важных утверждениях:

1. Четность суммы нескольких целых чисел совпадает с четностью количества нечетных слагаемых.

Пример.

Число 1+2+3+…+10 – нечетное, так как в сумме 5 нечетных слагаемых.. Число 3+5+7+9+11+13 – четное, так как в сумме 6 нечетных слагаемых.

2. Знак произведения нескольких (отличных от 0) чисел определяется четностью количества отрицательных сомножителей.

Свойства четности:

1) Сумма четных чисел четна.

2) Сумма двух нечетных чисел четна.

3) Сумма четного и нечетного чисел нечетна.

4) Произведение любого числа на четное число четно.

5) Если произведение нечетно, то все сомножители нечетны.

6) Сумма нечетного количества нечетных чисел нечетна.

7) Сумма четного количества нечетных чисел четна.

8) Разность и сумма двух данных чисел есть числа одной четности.

9) Если объекты можно разбить на пары, то их количество четно.

Все эти соображения можно на олимпиаде вставлять в текст решения задачи, как очевидные утверждения.

Пример 1.

Могут ли 20 тетрадей ценой в 9, 11 и 13 рублей стоить в сумме 193 рубля?

Решение.

Сумма четного количества нечетных чисел четна (свойство 7). У нас 20 тетрадей, цена каждой – нечетное число, значит, их сумма должна быть четна. Но 193 – нечетное число, поэтому получить его в виде суммы 20 нечетных чисел нельзя.

Пример 2.

Может ли сумма $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot M + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot K$, где M, $K \in N$ и больше 3, оканчиваться на 9?

Решение.

В сумме два слагаемых, в каждом из которых есть множитель 2, поэтому они четные (свойство 4), а значит, сумма четна и не может оканчиваться на 9.

Пример 3.

На столе лежат 6 монет, одна из них вверх орлом, другие – решкой. Можно ли все монеты положить вверх орлом, если можно одновременно переворачивать по две монеты?

Решение.

При переворачивании двух монет одновременно четность числа монет орлом вверх не меняется. Монет орлом вверх всегда будет нечетное количество, а у нас 6 монет на столе, 6 – число четное. Значит, нельзя.

2. Домашнее задание

Задача 1.

Костя посчитал сумму 1+3+5+…+997+999 и получил результат 247013. Верный ли ответ получил Костя?

Задача 2.

На листе бумаги написано число 11. Шестнадцать учеников передают листок друг другу, и каждый прибавляет к числу или отнимает от него единицу – как хочет. Может ли в результате получиться число 0?

Задача 3.

На прямой отметили несколько точек. Затем между двумя соседними точками отметили еще по точке, после чего опять проделали эту операцию несколько раз. Могло ли в итоге получиться ровно 2010 точек?

Модуль 4
Задачи на составление уравнений

Задачи модуля
1. Ознакомиться с некоторыми особенностями составления уравнений.
2. Развитие умения рассуждать.
3. Формирование интереса к математике.

---

1. Теоретический материал

Главная трудность при решении задачи на составление уравнений или систем уравнений в том, что по ее условию необходимо одну и ту же величину выразить двумя способами, а потом полученные выражения приравнять. Но какую именно величину – зависит от содержания задачи.

К данному типу задач относятся задачи на движение, задачи на совместную работу (аналогом расстояния здесь является объем выполненной работы, а скорости движения – производительность труда), задачи на проценты и части и другие.

При решении задач на проценты и части нужно помнить некоторые простые правила.

1) Чтобы найти часть от числа, нужно эту часть умножить на число.

2) Вся величина, от которой берутся проценты, составляет 100%.

3) Чтобы избавиться от процентов, нужно перевести их в части, разделив на 100.

4) Чтобы узнать, на сколько процентов изменилась какая-то величина, нужно из конечного значения вычесть начальное и результат разделить на начальное значение и умножить на 100%.

5) Чтобы узнать процентное содержание вещества в растворе, нужно массу вещества разделить на массу раствора и умножить на 100%.

Рассмотрим некоторые задачи.

Пример 1.

Турист отправляется в поход из А в В и обратно и проходит весь путь за 3 часа 41 минуту. Дорога из А в В идет сначала в гору, потом по ровному месту и затем под гору. На каком протяжении дорога проходит по ровному месту, если скорость туриста составляет при подъеме в гору 4 км/ч, по ровному месту – 5 км/ч, а при спуске с горы – 6 км/ч, а расстояние между А и В 9 км?

Решение.

Пусть протяженность дороги по ровному месту *x* км, тогда (9-x) км пути (в гору и под гору) турист проходит дважды (один раз со скоростью 4 км/ч, а другой раз – со скоростью 6 км/ч) и затрачивает на этот путь $\frac{9-x}{4}+\frac{9-x}{6}$ часов. По ровному месту он затрачивает $\frac{2x}{5}$ часов. В оба конца турист затрачивает 3 ч 41 мин., т.е. $\frac{2x}{5}+\frac{9-x}{4}+\frac{9-x}{6}=3\frac{41}{60}$. Решая это уравнение, получаем, что *x*=4 (км).

Ответ: на протяжении 4 км дорога проходит по ровному месту.

Пример 2.

Длину прямоугольника уменьшили на 10%, а ширину уменьшили на 20%. При этом периметр прямоугольника уменьшился на 12%. На сколько процентов уменьшится периметр прямоугольника, если его длину уменьшить на 20%, а ширину уменьшить на 10%?

Решение.

Пусть длина равна x, а ширина – y. Когда длину прямоугольника уменьшили на 10%, а ширину уменьшили на 20%, то периметр уменьшился на 2(0.1x+0.2y), что по условию составляет 12% от исходного периметра, т.е. 0.12P=0.12•2(x+y). Получаем 2(0.1x+0.2y)= 0.12•2(x+y), откуда вытекает x=4y. Если длину уменьшить на 20%, а ширину уменьшить на 10%, то периметр уменьшится на 2(0.2x+0.1y)=2(0.2•4y+0.1y)=1.8y. Выразим исходный периметр через y: P=2(x+y)=2(4y+y)=10y. То есть исходный периметр уменьшится на 18%.

Пример 3.

Свежие грибы содержат 90% воды, а сухие – 12% воды. Сколько получится сухих грибов из 44 кг свежих?

Решение.

По условию задачи 44 кг свежих грибов содержат 44•0,9=39,6 кг воды, а значит, сухого вещества 44-39,6=4,4 кг. Обозначим массу сухих грибов, которую можно получить из 44 кг свежих, через x кг. Эти x кг состоят из 0,12x кг воды и 0,88x кг сухого вещества. Так как масса сухого вещества и в свежих, и в сухих грибах одна и та же, то 0,88x=4,4.

Следовательно, x=5.

Ответ: 5 кг.

2. Домашнее задание

Задача 1.

Между городами А и В через возвышенность ходит автобус. При подъеме на возвышенность он идет со скоростью 25 км/ч, а при спуске – со скоростью 50 км/ч. От А до В автобус идет 3,5 ч, а от В до А – 4 ч. Найти расстояние между городами А и В.

Задача 2.

За весну Буратино похудел на 25%, затем за лето поправился на 20%, за осень похудел на 10%, а за зиму прибавил 20%. Похудел он в итоге или поправился?

Задача 3.

В 10 т руды содержится некоторое количество железа. После удаления из нее 4 т примесей, содержащих 10% железа, процентное содержание железа в руде повысилось на 20%. Сколько железа осталось в руде?

Задача 4.

Ученик при перемножении двух натуральных чисел, одно из которых на 94 больше другого, ошибся, уменьшив в произведении цифру десятков на 4. При делении, для проверки ответа, ошибочного произведения на больший из множителей он получил в частном 52, а в остатке – 107. Какие числа он перемножал?

Модуль 5
Анализ вариантов школьных туров олимпиад по математике

Известно, что устойчивый интерес к математике начинает формироваться в 14-15 лет. Но это не происходит само собой: для того чтобы ученик 7 или 8 класса начал всерьез заниматься математикой, необходимо, чтобы на предыдущих этапах ученик почувствовал, что размышления над трудными, нестандартными задачами доставляют подлинную радость.

Рассмотрим решения некоторых задач школьного (г. Липецк) и муниципального (Московская область) туров математических олимпиад.

1. Задания школьного этапа олимпиады 2010/2011 уч. г.

Задача 1.

В двух бочках было воды поровну. Количество воды в первой бочке сначала уменьшилось на 10%, а затем увеличилось на 10%. Количество воды во второй бочке, наоборот, сначала увеличилось на 10%, а затем уменьшилось на 10%. В какой бочке стало больше воды?

Решение.

Пусть сначала в каждой бочке было по x литров воды; тогда в первой бочке после всех изменений стало $(x-x\bullet 0.1)+ 0.1(x-x\bullet 0.1) =0.99x$ литров воды, а во второй бочке $(x+x\bullet 0.1)-0.1(x+x\bullet 0.1)=0.99x$, т.е. такое же количество воды как и в первой бочке.

Ответ: поровну.

Задача 2.

Два натуральных числа в сумме дают 2011. Вася увеличил каждое из них на 50 и перемножил полученные числа. У него получилось число, оканчивающееся на 2011. Докажите, что Вася ошибся.

Доказательство.

Если сумма двух натуральных чисел равна 2011, то одно из них четное, а другое нечетное. Если к четному числу прибавить 50, то получится четное число, а если к нечетному числу прибавить 50, получится нечетное число. Произведение четного и нечетного чисел число четное и поэтому не может оканчиваться на 2011.

2. Задания муниципального уровня 2009/2010 уч. г.

Задача 1.

Когда Винни-Пух пришел в гости к Кролику, он съел 3 тарелки меда, 4 тарелки сгущенки и 2 тарелки варенья, а после этого не смог выйти наружу из-за того, что сильно растолстел от такой еды. Но известно, что если бы он съел 2 тарелки меда, 3 тарелки сгущенки и 4 тарелки варенья или 4 тарелки меда, 2 тарелки сгущенки и 3 тарелки варенья, то спокойно смог бы покинуть нору гостеприимного Кролика. От чего больше толстеют: от варенья или от сгущенки? (*Д. Ланин*)

Решение.

По условию 3м + 4с + 2в > 2м + 3с + 4в, откуда

м + с >2в. (*)

По условию же 3м+ 4с + 2в > 4м + 2с +3в, откуда

2с > м + в. (**)

Складывая неравенства (*) и (**), получаем

м + 3с > м + 3в, откуда

с > в.

Ответ: от сгущенки.

Задача 2.

Сколько различных решений имеет уравнение

$|x^3 + 47x| = 12x^2 + 60$?

Решение.

Данное уравнение после раскрытия модуля разбивается на два уравнения: $x^3 - 12x^2 + 47x - 60 = 0$ и $x^3 + 12x^2 + 47x + 60 = 0$.

Заметим, что если в первом уравнении заменить x на $-x$, то мы получим второе уравнение, т.е. все решения первого уравнения, взятые с противоположным знаком, являются решениями второго уравнения, и наоборот, все решения второго уравнения, взятые с противоположным знаком, являются решениями первого уравнения. Преобразуем первое уравнение. Поскольку

$x^3 - 3x^2 \cdot 4 + 3x \cdot 4^2 - 4^3 - x + 4 = (x-4)^3 - (x-4) =$

$(x-4)(x^2 - 8x + 15) = (x-4)(x-3)(x-5)$,

то первое уравнение имеет вид $(x-3)(x-4)(x-5)=0$, т.е. числа 3, 4, 5 являются решениями первого уравнения.

Таким образом, исходное уравнение имеет 6 решений.

Ответ: 6.

3. Домашнее задание

Задача 1.

Разложите на множители $x^4 + 2010x^2 + 2009x + 2010$.

Задача 2.

Число умножили на сумму его цифр и получили 2008. Найдите это число.

Задача 3.

По кругу расставлены числа 1,2, …, 2010 по порядку. Разрешается менять местами любые два стоящие рядом числа, разность которых по модулю больше двух. Можно ли за несколько таких операций добиться того, чтобы эти числа располагались в противоположном порядке?

Задача 4.

Из корзины взяли половину всего количества яиц, потом еще половину остатка, затем половину нового остатка и, наконец, половину следующего остатка. После этого в корзине осталось 10 яиц. Сколько яиц было в корзине первоначально?

Модуль 6
Делимость натуральных чисел. Признаки делимости

Задачи модуля
1. Формирование умений проводить умозаключения, обосновывая свои действия ссылками на правила.
2. Выработка навыков использования признаков делимости при различных формулировках задач.

---

1. Теоретический материал

Признак делимости – это правило, позволяющее быстро определить, является ли число кратным заранее заданному числу, без необходимости выполнять деление.

Как правило, признаки делимости применяются при ручном счёте и для чисел, представленных в конкретной позиционной системе счисления (как правило, десятичной).

Приведем некоторые признаки делимости числа $\overline{a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0}$ *на:*

1) 2, если a_0 делится на 2;

2) 4 или 25, если число $\overline{a_1 a_0}$ делится на 4 или 25 соответственно;

3) 8, если число $\overline{a_2 a_1 a_0}$ делится на 8;

4) 3 или 9, если сумма цифр числа делится на 3 или на 9 соответственно;

5) 6, если исходное число делится и на 2, и на 3;

6) 5, если a_0 равно 0 или 5;

7) 10, если a_0 равно 0.

При делении числа a на число b с остатком можно записать $a = b \bullet k + r$, где r – остаток и $r < b$, k принимает значения 0, 1, 2 и т.д.

1.1 Основная теорема арифметики.

Натуральное число раскладывается на произведение простых множителей единственным образом, с точностью до порядка множителей.

Пример 1.

В корзине лежит меньше 100 яблок. Их можно разделить поровну между двумя, тремя и пятью детьми, но нельзя разделить поровну между четырьмя детьми. Сколько яблок в корзине?

Решение.

Искомое число должно делиться на 2, 3 и 5, т.е. на 30. Среди чисел, меньших 100, это 30, 60, 90. Но 60 делится на 4, следовательно, это или 30, или 90.

Ответ: 30 или 90.

Пример 2.

Докажите, что произведение любых трех последовательных чисел делится на 6.

Доказательство.

Среди трех последовательных чисел есть хотя бы одно четное (если наименьшее – нечетное, то четным обязательно будет среднее), поэтому их произведение делится на 2. Кроме того, среди этих чисел обязательно есть хотя бы одно, делящееся на 3 (обозначим наименьшее число за n; если n на 3 не делится, то оно либо дает при делении на 3 остаток 1, и $n+2$ – наибольшее число – делится на 3, либо остаток 2, и n+1 – среднее число – делится на 3), поэтому их произведение делится на 3. Поскольку 2 и 3 взаимно просты, то произведение 3-х последовательных чисел делится на 2•3=6.

Пример 3.

Докажите, что если взять трехзначное число, переставить в нем крайние цифры и вычесть из одного числа другое, то получившаяся разность будет делиться на 9.

Доказательство.

Найдем разность исходного трехзначного числа и числа, полученного из исходного перестановкой крайних цифр $\overline{abc}-\overline{cba}$ $=100a+10b+c-(100c+10b+a)=99(a-c)$. Полученная разность делится на 9.

2. Домашнее задание

Задача 1.

Найдите наименьшее натуральное число, делящееся на 36, в записи которого встречаются все 10 цифр.

Задача 2.

Докажите, что среди любых шести чисел есть два, разность которых делится на 5.

Задача 3.

На столе лежат книги, которые нужно упаковать. Если их связывать по 4, по 5 или по 6 в пачку, то каждый раз остается одна лишняя книга, а если связывать по 7 книг в пачку, то лишних книг не остается. Сколько книг могло быть на столе?

Задача 4.

Доказать, что если трехзначное число $\overline{abc}$ делится на 37, то числа $\overline{bca}$ и $\overline{cab}$ тоже делятся на 37.

Модуль 7
Принцип Дирихле

Задачи модуля
1. Формирование умений проводить умозаключения, обосновывая свои действия ссылками на правила.
2. Выработка навыков использования принципа Дирихле при решении задач.

---

1. Теоретический материал

Принцип Дирихле – утверждение, сформулированное немецким математиком Дирихле в 1834 году, устанавливающее связь между объектами («кроликами») и контейнерами («клетками») при выполнении определённых условий.

Принцип Дирихле выражает соотношение между двумя множествами. Самая популярная следующая формулировка принципа: «Если десять кроликов сидят в девяти ящиках, то в некотором ящике сидят не меньше двух кроликов».

Общая формулировка:

Если n кроликов сидят в k ящиках, то найдётся ящик, в котором сидят не меньше чем n/k кроликов, и найдётся ящик, в котором сидят не больше чем n/k кроликов.

Доказательство принципа Дирихле простое, но заслуживает внимания, поскольку похожие рассуждения часто встречаются.

Допустим, что в каждом ящике сидят меньше чем n/k кроликов. Тогда во всех ящиках вместе кроликов меньше чем (n/k)•k=n. Противоречие.

Формулировка принципа Дирихле кажется очевидной, однако трудность состоит в том, что в задачах не указаны ни кролики,
не ящики.

Зная принцип Дирихле, можно догадаться, в каких случаях его применять. Например, если каждому элементу множества A соответствует ровно один элемент множества B, то элементы A можно назвать кроликами, а элементы B – ящиками.

На принцип Дирихле при решении задач на олимпиаде можно прямо ссылаться. Рассуждения основываются на применении свойств неравенств и метода доказательства от «противного».

Пример 1.

В магазин привезли 25 ящиков яблок трех сортов, причем в каждом ящике лежат яблоки какого-то одного сорта. Можно ли найти 9 ящиков с яблоками одного сорта?

Решение:

Можно, так как если бы было по 8 ящиков яблок одного сорта, то получили бы 8•3=24 ящика, а по условию задачи их 25.

Пример 2.

На олимпиаде 10 школьников решили в сумме 35 задач, причем среди них были решившие ровно одну, ровно две и ровно три задачи. Доказать, что кто-то из них решил не менее 5 задач.

Доказательство.

Возьмем одного школьника, решившего ровно одну задачу, одного, решившего ровно две, и одного, решившего ровно три. Эти трое решили в сумме 6 задач. Остается еще 7 школьников, решивших в сумме 29 задач. Если взять *задачи* в качестве *кроликов* и *школьников* в качестве *клеток*, то получается в точности утверждение при $n=7$, $k=5$. ч.т.д.

Пример 3.

В школе 400 учеников. Докажите, что хотя бы двое из них родились в один день года.

Решение.

Всего в году 365 дней. Назовём дни ящиками, а учеников кроликами. Тогда в некотором ящике сидят не меньше 400/365 кроликов, т.е. больше одного. Следовательно, не меньше двух.

Можно рассуждать от противного. Допустим, что каждый день отмечают день рождения не больше одного ученика, тогда всего учеников не больше 366. Противоречие.

2. Домашнее задание

Задача 1.

На собеседование пришли 65 школьников. Им предложили 3 контрольных работы. За каждую контрольную ставилась одна из оценок: 2, 3, 4 или 5. Верно ли, что найдутся два школьника, получившие одинаковые оценки на контрольных?

Задача 2.

Комиссия из 60 человек провела 40 заседаний, причём на каждом заседании присутствовало ровно 10 членов комиссии. Докажите, что какие-то два члена комиссии встречались на её заседаниях по крайней мере дважды.

Задача 3.

В школе пять седьмых классов. В каждом из них учится по 32 человека. Докажите, что найдутся 14 человек, родившихся в один месяц.

Модуль 8
Конструктивные задачи

Задачи модуля
1. Формирование умений проводить умозаключения, обосновывая свои действия ссылками на правила.
2. Выработка навыков решения подобных задач.

---

1. Теоретический материал

Многие олимпиадные задачи начинаются со слов: «Можно ли…». При этом существуют две возможности:

1) ответ в задаче – нельзя, и тогда нужно доказать, что нельзя;

2) ответ – можно, и тогда нужно построить пример и показать, что он удовлетворяет условию задачи.

Типичный пример таких задач – задачи на переливание. При решении подобных задач обращается внимание на рациональную запись решения: в виде схемы или таблицы.

Пример 1.

Можно ли, имея лишь два сосуда 3 и 5 л, набрать из водопроводного крана 4 л воды?

Решение.

3л	н	3	п	0	н	3	п	1		1	п	0	н	3	п	0
5л		0		3		3		5	в	0		1		1		4

Ответ. В результате в 5 л сосуде оказалось 4 л воды.

Другой тип – на взвешивание. Обычно подразумеваются весы без стрелок, на которых можно только сравнивать грузы на двух чашках. При этом необходимо помнить, что полное решение задачи должно содержать рассмотрение всех возможных вариантов.

Пример 2.

Среди 4-х монет одна – фальшивая. Она отличается от настоящих монет весом, однако неизвестно, легче она или тяжелее настоя щих. Масса настоящей монеты 5 г. Имеется одна гиря массой 5 г. Как при помощи двух взвешиваний на чашечных весах обнаружить фальшивую монету и определить, легче она или тяжелее настоящих?

Решение.

Первое взвешивание. На одну чашку весов кладем 1 и 2 монеты, на другую – монету 3 и гирю. Возможны варианты:

1) весы в равновесии, тогда фальшивая монета 4, и вторым взвешиванием можно определить, легче она или тяжелее настоящей, сравнив ее с гирей.

2) Чашка с гирей тяжелее, тогда фальшивая монета на весах, причем, если это монета 3, то она тяжелее настоящей, а если это монета 1 или 2, то она легче настоящей. При втором взвешивании на одну чашку кладем монету 1 и монету 3, на вторую – монету 4 и гирю.

Если они равны, то монеты 1 и 3 настоящие и, значит, фальшивая монета 2 и она легче остальных.

Если монеты 1 и 3 легче, то фальшивая монета 1 и она легче настоящих.

Если монеты 1 и 3 тяжелее, то фальшивая монета 3 и она тяжелее настоящих.

3) Чашка с гирей легче, тогда фальшивая монета на весах, причем если это монета 3, то она легче настоящей, а если это монета 1 или монета 2, то она тяжелее настоящей. При втором взвешивании мы на одну чашку весов кладем монеты 1 и 3, а на вторую – монету 4 и гирю.

Если они равны, то монеты 1 и 3 настоящие и, значит, фальшивая монета 2 и она тяжелее настоящих.

Если монеты 1 и 3 легче, то фальшивая монета 3 и она легче настоящих.

Если монеты 1 и 3 тяжелее, то фальшивая монета 1 и она тяжелее настоящих.

Пример 3.

Кувшин уравновешивает графин и стакан, 2 кувшина весят столько же, сколько 3 чашки, а стакан и чашка уравновешивают графин. Сколько стаканов уравновешивают графин?

Решение.

Так как кувшин уравновешивает графин и чашку, то 2 кувшина = 2 графина +2 чашки, 3 чашки=4 стакана +2 чашки, 4 стакана=1 чашка. Следовательно, уравновесят графин 5 стаканов.

Ответ: 5 стаканов.

2. Домашнее задание

Задача 1.

Каким образом можно принести из реки ровно 6 л воды, если имеются только два ведра: одно – емкостью 4 л, другое – 9 л?

Задача 2.

В ящике 25 кг гвоздей. Как с помощью чашечных весов и одной гири в 1 кг за два взвешивания отмерить 19 кг гвоздей?

Задача 3.

Арбуз уравновешивает дыню и свеклу. Дыня уравновешивает капусту и свеклу. 2 арбуза весят столько же, сколько 3 кочана капусты. Во сколько раз дыня тяжелее свеклы?

Модуль 9
Логические задачи

Задачи модуля
1. Формирование умений проводить умозаключения, обосновывать свои действия.
2. Выработка навыков решения логических задач.
3. Развитие логического мышления.
4. Развитие интереса к математике.

1. Теоретический материал

Логические задачи – это своеобразная «гимнастика для ума», средство для утоления естественной для каждого мыслящего человека потребности испытывать и упражнять силу собственного разума.

Решение логических задач – это не только очень увлекательный, но и крайне полезный способ времяпрепровождения.

Можно выделить следующие виды логических задач: комбинаторные, на взвешивание, на переливание, сюжетные логические задачи, на высказывания ложные и истинные и др. Решению логических задач, в которых рассматриваются два или больше конечных множеств, между которыми необходимо установить взаимнооднозначное соответствие, часто помогает использование таблиц и схем. Также логические задачи решаются выявлением истинных и ложных высказываний и другими способами.

Пример 1.

В авиационном подразделении служат Андреев, Борисов, Владимиров, Григорьев и Самойлов. Их специальности (они перечислены не в том же порядке, что и фамилии): пилот, штурман, бортмеханик, радист и синоптик. О них известно следующее:
1. Борисов и Григорьев не умеют управлять самолетом.
2. Андреев и Григорьев готовятся стать штурманами.
3. Борисов и Самойлов живут в одном доме с радистом.
4. Владимиров был в доме отдыха вместе с Борисовым и сыном синоптика.

5. Андреев и Борисов в свободное время любят играть в шахматы с бортмехаником.
6. Григорьев, Владимиров и синоптик увлекаются боксом.
7. Радист боксом не увлекается.
Определите соответствие.

Решение.

Начнем решение задачи с построения логической таблицы. Элементы первого множества (фамилии) записываем в строках, а элементы второго множества (профессии) расположим по колонкам:

	Пилот	Штурман	Бортмеханик	Радист	Синоптик
Андреев					
Борисов					
Владимиров					
Григорьев					
Самойлов					

А теперь проведем анализ условия задачи, сделаем на его основе выводы и зафиксируем их в таблице. Из условия 1 следует, что ни Борисов, ни Григорьев пилотами быть не могут. Поставим на соответствующих клетках (на пересечении фамилии и профессии) знак «минус». Из условия 2 ясно, что ни Андреев, ни Григорьев пока еще не штурманы. Занесем в таблицу и это. Условие 3 приводит к выводу, что радист не Борисов и не Самойлов. Запишем. Условие 4 говорит о том, что фамилия синоптика не Борисов и не Владимиров. Отметим и это. Условие 5 подсказывает, что бортмеханик не Андреев и не Борисов. Записав это в таблицу, мы увидим, что в строке «Борисов» знаками «минус» заполнены все клетки, кроме одной, это означает, что Борисов может быть только штурманом, и никем иным. Отметим этот вывод и поставим в соответствующей клетке знак «плюс». А поскольку, согласно условию задачи, речь идет только об одном штурмане, то и в столбце «штурман» в оставшихся незаполненных клетках проставляем знаки «минус». И вот что получается на данный момент:

	Пилот	Штурман	Бортмеханик	Радист	Синоптик
Андреев		–	–		
Борисов	–	+	–	–	–
Владимиров		–			–
Григорьев	–	–			
Самойлов		–	–	–	

Продолжим анализ. Из условия 6 видно, что синоптик – не Григорьев и не Владимиров. Отмечаем это в таблице. Условие 7, сопоставленное с условием 6, показывает, что радист – не Григорьев и не Владимиров. Ставим в соответствующие клетки знак «минус». Теперь в строке «Григорьев» осталась одна клетка, в которой не стоит знак минус, следовательно, Григорьев – бортмеханик. Отмечаем этот вывод знаком «плюс», а в других незаполненных клетках в столбце «бортмеханик» проставляем знаки «минус», так как других бортмехаников по условию задачи нет. Не стоит знак «минус» и в верхней клетке, в столбце «радист». Эта клетка расположена в строке «Андреев». Значит, Андреев – радист. Отметим это знаком «плюс» и заполним знаками «минус» другие свободные клетки в строке «Андреев»

(ведь никем, кроме радиста, он быть не может). Теперь из таблицы видно, что пилот – Владимиров, а синоптик – Самойлов. Решение задачи завершено.

Итоговая таблица:

	Пилот	Штурман	Бортмеханик	Радист	Синоптик
Андреев	–	–	–	+	–
Борисов	–	+	–	–	–
Владимиров	+	–	–	–	–
Григорьев	–	–	+	–	–
Самойлов	–	–	–	–	+

К наиболее интересным и в то же время трудным логическим задачам относятся так называемые задачи о лгунах. При решении подобных задач поступают следующим образом. Берется одно из утверждений и предполагается, что оно истинно. Если при рассмотрении других утверждений не получаем противоречия, то рассмотренное утверждение действительно истинное. Если же при рассмотрении других утверждений получаем противоречие, то взятое утверждение ложное. Если утверждений два, то делаем вывод о том, что верно второе утверждение. Если утверждений больше двух, тогда нужно применять перебор различных предположений.

Пример 2.

Каждый из четырех гномов – Беня, Веня, Женя, Сеня – либо всегда говорит правду, либо всегда врет. Мы услышали такой разговор: Беня – Вене: «Ты врун»; Женя – Бене: «Сам ты врун»; Сеня – Жене: «Да оба они вруны, – (подумав), – впрочем, ты тоже». Кто из них говорит правду?

Решение.

Предположим, Сеня говорит правду. Тогда, согласно его словам, три остальных гнома – вруны. И, тем самым, фраза Бени является правдой. Значит, предположение приводит к противоречию, поэтому Сеня – врун, и его утверждение, что Женя – врун, является ложным. Отсюда заключаем, что Женя говорит правду. Тем самым, Беня – врун, а Веня говорит правду. Отметим, что фраза Сени «Да оба они вруны» (относительно Бени и Вени) является ложной (несмотря на то, что Беня действительно врун), поскольку Веня – не врун.

Пример 3.

На острове живут 100 рыцарей и 100 лжецов, у каждого из них есть хотя бы один друг. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Однажды утром каждый житель произнес либо фразу «Все мои друзья – рыцари», либо фразу «Все мои друзья – лжецы», причем каждую из фраз произнесло ровно 100 человек. Найдите наименьшее возможное число пар друзей, один из которых рыцарь, а другой – лжец.

Решение.

Покажем, что можно найти не менее 50 пар друзей, один из которых рыцарь, а другой – лжец. Если фразу «Все мои друзья – лжецы» произнесло не менее 50 рыцарей, то каждый из них знает хотя бы одного лжеца, и 50 требуемых пар нашлись. В противном случае фра

зу «Все мои друзья – лжецы» произнесло не менее 50 лжецов. Но так как лжецы лгут, каждый из них знает хотя бы одного рыцаря, и 50 требуемых пар также нашлись. Покажем, что возможна ситуация, в которой пар друзей рыцарь-лжец ровно 50. Обозначим рыцарей k_1, k_2, .., k_{100} , а лжецов– l_1, l_2, .., l_{100} . Пусть рыцарь k_1 дружит только с лжецом l_1 , рыцарь k_2 – только с лжецом l_2 , рыцарь k_{50} – только с лжецом l_{50} (и при этом лжецы l_1, l_2, .., l_{50} больше ни с кем не дружат). Рыцари k_{51}, k_{52}, .., k_{100} пусть дружат только друг с другом, и лжецы l_{51}, l_{52}, .., l_{100} – тоже только друг с другом. Тогда пар рыцарь-лжец ровно 50, 100 человек k_1, k_2, .., k_{50}, l_1, l_2, .., l_{50} произносят фразу «Все мои друзья – лжецы», а остальные 100 человек произносят фразу «Все мои друзья – рыцари».

2. Домашнее задание

Задача 1.

В чашке, стакане, кувшине и банке находятся молоко, лимонад, квас и вода. Известно, что вода и молоко не в чашке; сосуд с лимонадом стоит между кувшином и сосудом с квасом; в банке не лимонад и не вода; стакан стоит около банки и сосуда с молоком. В какой сосуд налита каждая из жидкостей?

Задача 2.

В очереди за билетами в кино стоят друзья: Юра, Миша, Володя, Саша и Олег. Известно, что Юра купит билет раньше, чем Миша, но позже Олега; Володя и Олег не стоят рядом, а Саша не находится рядом ни с Олегом, ни с Юрой, ни с Володей. Кто за кем стоит?

Задача 3.

Пятеро школьников из пяти различных городов приехали в Липецк для участия в областной математической олимпиаде. На вопрос «Откуда вы, ребята?» они ответили: Андреев: «Я приехал из Грязей, а Григорьев живет в Данкове», Борисов: «В Данкове живет Васильев, я прибыл из Задонска», Васильев: «Из Грязей приехал я, а Борисов – из Чаплыгина», Григорьев: «Я прибыл из Данкова, а Данилов – из Усмани», Данилов: «Да, я действительно из Усмани, Андреев живет в Задонске».

Когда удивились противоречивости их ответов, ребята объяснили: «Каждый высказал одно утверждение правильное, а другое – ложное.

Но по нашим ответам вполне можно установить, откуда мы приехали». Откуда приехал каждый из школьников?

Модуль 10
Геометрические фигуры на плоскости

Задачи модуля

1. Формирование умений проводить умозаключения, обосновывать свои действия.
2. Выработка навыков решения планиметрических задач.
3. Развитие воображения.
4. Развитие интереса к математике.

---

1. Теоретический материал

При решении геометрических задач обычно используются следующие методы: *геометрический* (требуемое утверждение выводится с помощью логических рассуждений из ряда известных теорем); *алгебраический* (нахождение искомых величин выполняется прямым счетом на основании различных зависимостей между геометрическими величинами с помощью составления уравнения или системы уравнений); *комбинированный* (на некоторых этапах решение ведется геометрическим методом, на других – алгебраическим). Но какой бы метод решения ни был выбран, успешность его использования зависит, естественно, от знаний и умений их применять.

Прежде чем приступить к решению задачи, необходимо изучить условия задачи. Рекомендации по изучению задачи:

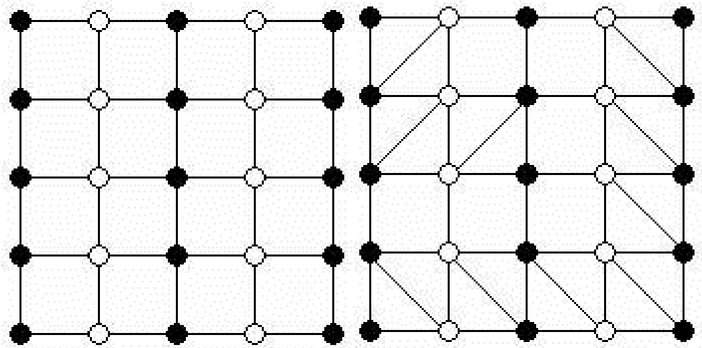
1. Выяснить, что дано: какие объекты заданы, что о них известно (свойства, признаки), как они связаны между собой.
2. Понять, что нужно найти или доказать.
3. Попытаться понять, как выглядит конечный результат.
4. Если данные или искомые не обозначены, ввести подходящие обозначения для символической записи всех условий и требований задачи.
5. Построить чертеж (рисунок). Чертеж должен быть, по возможности, точным, не мелким. В него нужно внести все, что дано в условии, и все, что известно про данные и искомые элементы.

Пример 1.

Квадрат 4х4 разделили на 16 единичных квадратов. Найти максимально возможное количество диагоналей, которые можно провести в этих единичных квадратах так, чтобы они не имели общих точек (включая концы).

Решение.

Раскрасим столбцы вершин единичных квадратов чёрным и белым цветами. Каждая диагональ единичного квадрата будет иметь концами точки разного цвета. Поэтому непересекающихся диагоналей может быть не более десяти. Один из вариантов представлен ниже.



Ответ: 10.

Пример 2.

Пусть m – произведение периметра треугольника на сумму трёх высот этого треугольника. Какое из высказываний ложно, если площадь этого треугольника равна 1?

А: m может быть больше 1000;

Б: всегда $m>6$;

В: m может равняться 18;

Г: если треугольник правильный, то $m>16$;

Д: m может быть меньше 12.

Решение.

Площадь треугольника определяется по формуле $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$, откуда $h_a=\frac{2S}{a}$, $h_b=\frac{2S}{b}$, $h_c=\frac{2S}{c}$.

По условию задачи $m=(a+b+c)(\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c})$. Отсюда видно, что если треугольник с площадью 1 и достаточно большим периметром, величина m может превысить 1000. Если раскрыть скобки, то получится выражение вида $m=6+f(a,b,c)$, принимающее значения, большие шести. Для правильного треугольника m=3•2•3=18>16. Следовательно, методом исключения, неверно пятое утверждение.

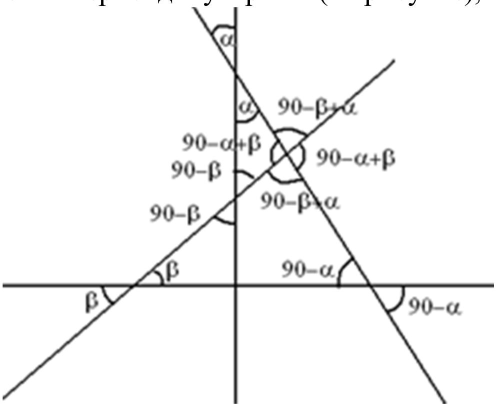
Ответ: Д: m может быть меньше 12.

Пример 3.

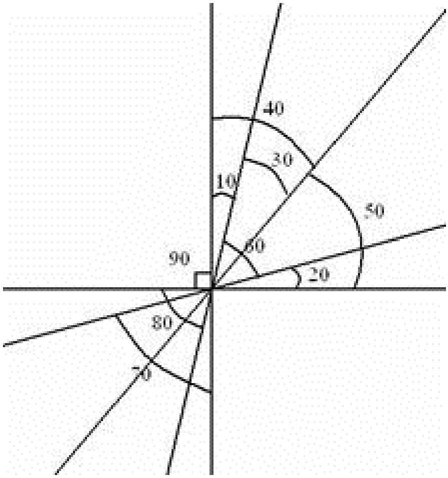
Некоторое количество прямых изобразили на бумаге так, что между ними есть углы величиной 10°, 20°, 30°, 40°, 50°, 60°, 70°, 80°, 90°. Найдите наименьшее количество прямых, для которых такое возможно.

Решение.

Заметим, что среди прямых, две обязательно должны быть перпендикулярны. Если две перпендикулярные прямые пересечь ещё двумя, острых углов может получиться не более пяти, как в случае, когда ни одна из этих двух прямых не проходит через точку пересечения перпендикулярных (на рисунке), так и в других случаях.



Имея же 5 прямых, мы можем построить требуемую конструкцию:



Ответ: 5.

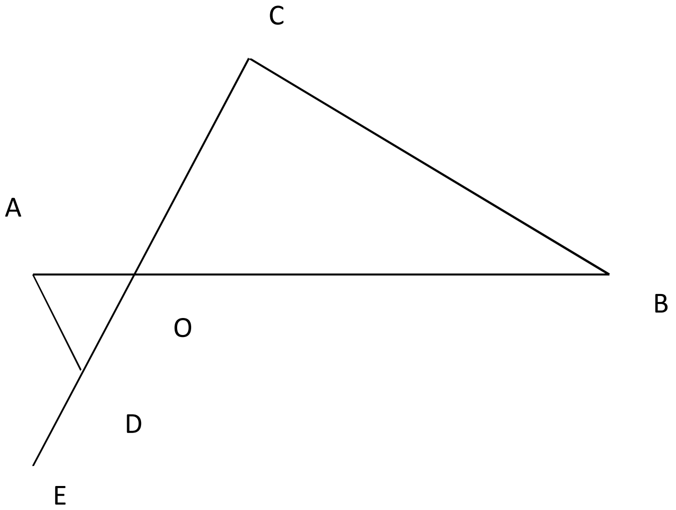
2. Домашнее задание

Задача 1.

Лучи OA и OB образуют прямой угол. Любознательный семиклассник Петя провел внутри этого угла лучи OC и OD, образующие угол 10°, а затем посчитал все острые углы между любыми парами нарисованных лучей (не только соседних). Оказалось, что сумма самого большого и самого маленького из найденных углов составляет 85°. Найдите величины трех углов, на которые прямой угол разбивается лучами OC и OD.

Задача 2.

На рисунке, выполненном с нарушением реальных размеров, величины углов A, C и ADE должны быть равны 22°, 60° и 117° соответственно. Найдите величину угла B.



Задача 3.

Точки E и F – соответственно середины сторон BC и CD квадрата ABCD. Отрезки AE и BF пересекаются в точке K. Что больше: площадь треугольника AKF или площадь четырехугольника KECF?

Модуль 11
Игровые задачи

Задачи модуля

1. Формирование умений проводить умозаключения, обосновывать свои действия.
2. Выработка навыков нахождения выигрышных стратегий.
3. Развитие интереса к математике.

1. Теоретический материал

Важным качеством любого человека является умение выбрать и обосновать лучший вариант своих действий, в каких бы то ни было условиях. Как играть, чтобы не проиграть (или игры со стратегией)?

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Кто первым назовет число 100.

Играют двое. Один называет любое целое число от 1 до 9 включительно. Второй прибавляет к названному числу любое целое число от 1 до 9 и называет сумму, к этой сумме первый вновь прибавляет любое целое число от 1 до 9 и называет новую сумму, и т.д. Выигрывает тот, кто первым назовет число 100.

Какие числа должен подбирать второй игрок, чтобы всегда выигрывать, независимо от числа, которое предлагает первый игрок.

Решение.

Нетрудно обнаружить способ игры второго, иначе говоря, стратегию второго, которая обеспечивает ему победу: «добавлять до числа, кратного 10». Если, к примеру, первый назвал 4, второй прибавляет 6 и называет сумму 10. Если первый прибавит 9 и назовёт сумму 19, второй прибавит 1 и назовёт 20. Ясно, что как бы ни играл начинающий, второй при такой стратегии назовёт первым число 100. Если он хоть раз ошибётся, то этой стратегией неминуемо воспользуется первый и победит.

Способ игры, обеспечивающий выигрыш одному из партнёров в любом случае, как бы ни играл его противник, называется выигрышной стратегией – это и есть секрет успеха, то есть «ключ к победе», обладая которым можно выиграть у любого сколь угодно сильного противника.

Пример 2.

На доске написано число 2000. Петя и Коля по очереди делят число, написанное на доске, на любое из следующих чисел: 2, 5, 10. Проигрывает тот из них, после хода которого на доске появится нецелое число. Петя ходит первым. Кто выигрывает при правильной игре?

Решение.

Приведем выигрышную стратегию для Пети. Первым ходом он делит число 2000 на 5, после чего на доске написано 400. Далее на каждый ход Коли Петя отвечает таким же ходом, т.е. делит на то же число, что и Коля. Теперь заметим, что 400 – полный квадрат, а значит, после каждого хода Пети на доске вновь появляется квадрат некоторого натурального числа. Тогда после Колиного хода квадрата натурального числа появиться не может, а значит, не может появиться и единица. Следовательно, единица появится после хода Пети, т.е. Петя выигрывает.

2. Домашнее задание

Задача 1. Игра дат

Первый игрок сообщает какую-нибудь дату января. Каждый игрок на своём ходе называет более позднюю дату, увеличивая каждый раз или календарную дату в месяце, или порядковый номер месяца, но не то и другое одновременно. Первый, кто доберётся до 31 декабря, выигрывает. Определить выигрышную стратегию для начинающего.

Задача 2. Поставь на ноль.

Возьмём полоску клетчатой бумаги и занумеруем клетки числами 0, 1, 2, …, 14. На одной из 15-ти клеток стоит фишка. Двое игроков по очереди передвигают фишку влево на 1, 2, 3 или 4 клетки. Проигрывает тот, кому некуда ходить.

При каком начальном положении фишки выигрывает начинающий, а при каком его партнёр?

Задача 3.

Малыш и Карлсон по очереди достают из коробки конфеты, при этом каждый берет на одну конфету больше или меньше, чем перед этим взял другой, не брать конфеты из коробки в свою очередь нельзя. Вначале в коробке было 24 конфеты, и Малыш и Карлсон договорились, что если в какой-то момент в коробке останется ровно 4 или 14 конфет, то тому, чья очередь брать конфеты, достанется торт. Сможет ли Карлсон, который первым берет конфеты, выиграть торт, если вначале он имеет право взять 1 или 2 конфеты?

Модуль 12
Олимпиадные задания

Задачи модуля
1. Повторение методов решения олимпиадных задач.
2. Отработка навыков нахождения решений задач.
3. Развитие интереса к математике.

---

1. Теоретический материал

Умение решать задачи, особенно олимпиадные, является одним из показателей развитости математического мышления ученика. В решении задач оценивается, прежде всего, математическая правильность, однако приветствуется и рациональность решения, а также аккуратность и подробность. Самостоятельность решения приносит пользу и помогает подготовиться к занятиям математикой.

Рассмотрим некоторые задачи, встречающиеся на школьных и городских олимпиадах.

Задача 1.

В классе 25 учеников, а сумма их возрастов составляет 270 лет. Найдутся ли в классе 20 учащихся, сумма возрастов которых больше 260?

Решение.

Пусть такие 20 учащихся найдутся. Тогда сумма возрастов оставшихся 5 учеников будет не больше 10 лет. То есть средний возраст этих учеников должен быть не больше 2 лет, что противоречит возрасту учащегося школы. Таким образом, таких учащихся не найдется.

Задача 2.

За два года предприятие снизило объем выпускаемой продукции на 51%. При этом каждый год объем продукции снижался на одно и то же число процентов. На сколько?

Решение.

Пусть ежегодно выпуск продукции снижался на x%. Примем первоначальный объем продукции за 1. Тогда через год продукции будет выпущено 1-x/100, а через два года – $(1\text{-}x/100)^2$. По условию это число равно 1-51/100=0.49, откуда 1-x/100=0.7 и x=30.

Ответ: 30%/

Задача 3.

Найдите угол между часовой и минутной стрелками в 7 ч 38 мин.

Решение.

За 1 ч минутная стрелка проходит полный круг (360°), а часовая – в 12 раз меньше, т.е. 30°. Значит, в 7 ч 00 мин минутная стрелка будет отставать от часовой стрелки на 210°. Через 38 минут минутная стрелка повернется на угол $\frac{38}{60}\cdot 360°$=228°, а часовая на угол в 12 раз меньше, т.е. на 19°. Тогда в 7 ч 38 мин угол между ними будет 210°+19°-228°=1°.

Ответ: 1°.

2. Домашнее задание

Задача 1.

Дробь $\dfrac{В \cdot А \cdot Р \cdot Е \cdot Н \cdot Ь \cdot Е}{К \cdot А \cdot Р \cdot Л \cdot С \cdot О \cdot Н}$ равна целому числу, разные буквы обозначают разные цифры, а между ними стоит знак умножения. Чему равна дробь? Ответ обоснуйте.

Задача 2.

В коробке имеются карандаши разного цвета, разной длины и разной толщины. Придумайте такой набор карандашей, чтобы у любых двух из них совпадал ровно один признак (цвет, длина или толщина).

Задача 3.

Вася в течение суток тратит 1/3 часть своего времени на сон, 1/4 - на занятия в школе, 1/5 – на встречи с друзьями, 1/6 своего времени слушает музыку, 1/7 – играет на компьютере. Можно ли так жить, если каждым из перечисленных дел он занимается отдельно?

Задача 4.

Какой угол образуют стрелки часов в 12 часов 20 минут?

Ответы и решения

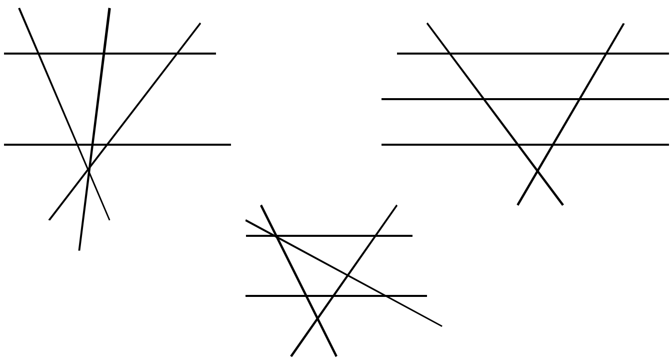
Решения заданий модуля 1

Задача 1.

Нарисуйте на плоскости пять различных прямых так, чтобы они пересекались ровно в семи различных точках.

Решение.

Возможные варианты расположения пяти прямых, пересекающихся в семи различных точках.



Задача 2.

В трехзначном числе последняя цифра 3. Если ее переставить на начало числа, то получится число, которое будет на 1 больше, чем утроенное первоначальное число. Найдите начальное число.

Решение.

Краткая запись начального числа $\overline{ab3}$, полученного числа $\overline{3ab}$. По условию задачи имеем $3\,\overline{ab3}+1=\overline{3ab}$. Используя десятичную запись числа, получим $3(100a+10b+3)+1=300+10a+b$. Откуда следует $10a+b=10$, $b=10(1-a)$, т.е. b делится на 10, но b - цифра, поэтому $b=0$, тогда $a=1$.

Ответ: 103.

Задача 3.

В школе 30 классов и 1000 учащихся. Докажите, что есть класс, в котором не менее 34 учеников.

Доказательство.

Предположим противное, что в классах учеников меньше 34, тогда учащихся в школе не более 33•30=990, а в условии задачи сказано, что учащихся 1000. Значит, есть класс, в котором не менее 34 учащихся.

Решения заданий модуля 2

Задача 1.

Произведение первой цифры числа на оставшуюся часть равно 57, а произведение последней цифры на оставшуюся часть числа равно 105. Найдите это число.

Решение.

При умножении цифры на оставшуюся часть числа дает 57, которое является простым числом (его делители 1 и 57), поэтому первая цифра числа есть 1, оставшаяся часть 57.

Искомое число 157.

Задача 2.

Какие цифры нужно поставить вместо А, В, С, Д в примере на сложение АВСД+АВС+АВ+А=4321.

Решение.

По условию:
1000А+100В+10С+Д+(100А+10В+С)+(10А+В)+А=4321, т.е.
1111А+111В+11С+Д=4321. Ясно, что в этом равенстве 2<А<4, т.е.
А=3 и 111В+11С+Д=988, отсюда 7<В<9, т.е. В=8, 11С+Д=100. Теперь находим, что С=9, Д=1.

Итак, А=3, В=8, С=9, Д=1.

Ответ: 3891+389+38+3=4321.

Задача 3.

Из какого наименьшего числа «елок» может состоять «лесок»:

ЕЛКА+ … +ЕЛКА=ЛЕСОК

(одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными буквами разные)?

Решение.

Проверим комбинацию из двух елок и будем добавлять по одной к предыдущему результату. Основное уравнение:

2000Е+200Л+20К+2А=10000Л+1000Е+100С+10Ø+К.

Отсюда Л=1. При умножении столбиком видим, что существует только два варианта 2Е=10+Е или 2Е+10+Е+1, т.е. Е=10 или 11, но Е – цифра, т.е. «елок» больше 2.

Пусть «елок» 3 штуки, тогда при умножении столбиком видим, что Л=1 или 2, тогда из разряда тысяч получаем 3Е=10+Е (Е=5) или 3Е=10+Е+1 (не существует цифры) или 3Е=10+Е+2 (Е=6). При Л=1, Е=5 можем получить один из вариантов О=8 , К=6 , А=2, С=4

Ответ: 3.

Решения заданий модуля 3

Задача 1.

Костя посчитал сумму 1+3+5+…+997+999 и получил результат 247013. Верный ли ответ получил Костя?

Решение.

Среди чисел от 1 до 1000 ровно половина – нечетные. У нас сумма нечетных чисел 1, 3, 5,…, 999; в ней 500 нечетных чисел, по свойству 7: сумма четного количества нечетных чисел четное число. Костя получил нечетное число, значит, ответ неверный.

Ответ: неверный.

Задача 2.

На листе бумаги написано число 11. Шестнадцать учеников передают листок друг другу, и каждый прибавляет к числу или отнимает от него единицу – как хочет. Может ли в результате получиться число 0?

Решение.

После каждого хода характер четности меняется: после первого ученика число становится четным, после второго нечетным; после третьего - четным; после четвертого – нечетным. Тогда после шестнадцатого число будет нечетным. Поэтому нуль в конце получиться не может.

Ответ: не может.

Задача 3.

На прямой отметили несколько точек. Затем между двумя соседними точками отметили еще по точке, после чего опять проделали эту операцию несколько раз. Могло ли в итоге получиться ровно 2010 точек?

Решение.

Пусть вначале было отмечено k точек. Тогда после первой операции мы отметим k-1 новую точку (по одной между первой и второй, второй и третьей, …, k-1-й и k-й исходными точками), и всего отмеченных точек станет $2k$-1, т.е. нечетное число. Оно будет оставаться таким и после любого числа таких операций, а число 2010 четно.

Ответ: не могло.

Решения заданий модуля 4

Задача 1.

Между городами А и В через возвышенность ходит автобус. При подъеме на возвышенность он идет со скоростью 25 км/ч, а при спуске – со скоростью 50 км/ч. От А до В автобус идет 3,5 ч, а от В до А – 4 ч. Найти расстояние между городами А и В.

Решение.

Эту задачу можно решить арифметически, т.е. без составления уравнения.

Рейс автобуса в оба конца длится 7.5 ч, при этом общее расстояние, которое он проходит под гору, равно расстоянию, которое он проходит в гору. Но в гору он идет в два раза медленнее, чем под гору; следовательно, на всех подъемах он находится в два раза больше времени, чем на всех спусках. Таким образом, из 7.5 часов на спуски автобус затрачивает 2.5 ч, а на подъемы – 5 ч, и расстояние от А до В равно 25•5=125 (км), т.к. расстояние, проходимое автобусом в гору «туда», и расстояние в гору при рейс «обратно» в сумме составляют расстояние от А до В.

Задача 2.

За весну Буратино похудел на 25%, затем за лето поправился на 20%, за осень похудел на 10%, а за зиму прибавил 20%. Похудел он в итоге или поправился?

Решение.

Пусть Буратино весит x кг. За весну он похудел на 10%, т.е. на $0.1x$ кг, и стал весить x-$0.1x$=$0.9x$ кг. За лето он поправился на 20%, т.е. на $0.2(0.9x)$ кг и стал весить уже $0.9x+0.18x=1.08x$ кг. Осенью он похудел на 10%, поэтому стал весить $1.08x$ -$0.1(1.08x)=0.972x$ кг. А за зиму Буратино прибавил 20%, поэтому он стал весить $0.972x+0.2(0.972x)=1.1664x$. Значит, Буратино в итоге поправился.

Ответ: поправился.

Задача 3.

В 10 т руды содержится некоторое количество железа. После удаления из нее 4 т примесей, содержащих 10% железа, процентное содержание железа в руде повысилось на 20%. Сколько железа осталось в руде?

Решение.

Пусть изначально в руде имелось x кг железа. После того, как из нее удалили вместе с примесями 4•0,1=0,4 т железа, в оставшихся 6 тоннах руды оказалось (x-0,4) т. Так как железа в оставшейся руде на 20% больше, чем железа первоначально в 10 тонных, то $\frac{x-0,4}{6}100-\frac{x}{10}100=20$. Решая это уравнение, получаем, что x=4. Следовательно, в руде осталось железа 4-0,4=3,6 т.

Ответ: 3,6 т.

Задача 4.

Ученик при перемножении двух натуральных чисел, одно из которых на 94 больше другого, ошибся, уменьшив в произведении цифру десятков на 4. При делении, для проверки ответа, ошибочного произведения на больший из множителей он получил в частном 52, а в остатке – 107. Какие числа он перемножал?

Решение.

Пусть меньший из множителей – x, тогда больший равен x+94. Так как ученик уменьшил в произведении цифру десятков на 4, то ошибочное произведение меньше истинного на 40, т.е. равно $x(x+94)-40$. Получаем уравнение равно $x(x+94)-40=(x+94)•52+107$. Решая его, находим x=53, x+94=147.

Ответ: 53, 147.

Решение заданий модуля 5

Задача 1.

Разложите на множители $x^4+2010x^2+2009x+2010$

Решение.

$$x^4+2010x^2+2009x+2010=x^4+x^3+2010x^2+2009x+2010-x^3=$$
$$=x^2(x^2+x+1)+2009(x^2+x+1)+(1-x)(1+x+x^2)=(x^2+x+1)(x^2-x+2010)$$

Задача 2.

Число умножили на сумму его цифр и получили 2008. Найдите это число.

Решение.

Искомое число является делителем числа 2008. Разложим число 2008 на простые множители: $2008=2\cdot2\cdot2\cdot251$. Выпишем все делители числа 2008: 1, 2, 3, 4, 8, 251, 502, 1004, 2008. Найдя сумму цифр каждого из них, заметим, что условие задачи выполняется только для числа 251($2008=251\cdot(2+5+1)$).

Ответ: 251.

Задача 3.

По кругу расставлены числа 1,2, …, 2010 по порядку. Разрешается менять местами любые два стоящие рядом числа, разность которых по модулю больше двух. Можно ли за несколько таких операций добиться того, чтобы эти числа располагались в противоположном порядке? (*А. Гейфуллин*)

Решение.

Рассмотрим числа 1, 2 и 3. Мы не можем менять местами какие-либо из этих трех чисел, даже если они стоят рядом. Значит, их порядок по часовой стрелке будет сохраняться. Таким образом, мы не можем изменить их порядок.

Ответ: нет.

Задача 4.

Из корзины взяли половину всего количества яиц, потом еще половину остатка, затем половину нового остатка и, наконец, половину следующего остатка. После этого в корзине осталось 10 яиц. Сколько яиц было в корзине первоначально?

Решение.

Пусть в корзине первоначально было x яиц. Тогда $x-\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}x$; $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x=\frac{1}{4}x$; $\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}x=\frac{1}{8}x$; $\frac{1}{8}x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}x=\frac{1}{16}x$; $\frac{1}{16}x=10$, откуда $x=160$.

Ответ: 160.

Решения заданий модуля 6

Задача 1.

Найдите наименьшее натуральное число, делящееся на 36, в записи которого встречаются все 10 цифр.

Решение.

Число делится на 36, значит, оно должно делиться на 4 и 9. Искомое число 1023457896.

Ответ: 1023457896.

Задача 2.

Докажите, что среди любых шести чисел есть два, разность которых делится на 5.

Доказательство.

Остатков при делении на 5 может быть пять видов: 0, 1, 2, 3, 4. Чисел шесть, значит, среди них найдутся хотя бы два с равными остатками. Поэтому их разность разделится на 5.

Задача 3.

На столе лежат книги, которые нужно упаковать. Если их связывать по 4, по 5 или по 6 в пачку, то каждый раз остается одна лишняя книга, а если связывать по 7 книг в пачку, то лишних книг не остается. Сколько книг могло быть на столе?

Решение.

Пусть n – число книг на столе. По условию, n-1 делится на 4, на 5 и на 6, а значит, и на их НОК – 60, т.е. n-1=60m, где m –целое число. Таким образом, нужно найти число n вида 60m+1, которое делилось бы на 7. Из чисел m=0,1,2,3,4,5,6, как нетрудно проверить, подходит только m=5, так что наименьшее число книг, которое могло быть на столе, 301.

Посмотрим, какие еще значения m годятся. Пусть 60m+1 делится на 7; тогда и 60m+1-301 делится на 7, т.е. 60(m-5) делится на 7 и, значит, m-5 делится на 7. Отсюда m=7k+5, где k – целое число. Значит, n=60m+1=60(7k+5)+1=420k+301. Итак, на столе могло быть 420k+301 книга, где k – любое целое неотрицательное число.

Задача 4.

Доказать, что если трехзначное число $\overline{abc}$ делится на 37, то числа $\overline{bca}$ и $\overline{cab}$ тоже делятся на 37.

Доказательство.

По условию число A кратно 37, поэтому A=100a+10b+c=37k, где k –целое. Но тогда число B=100a+10b+c=10•(100a+10b+c)-999a=10A-37•(27a)=10•37k-37•(27a)=37•(10k-27a).

Таким образом, число B кратно 37. Аналогично доказывается, что и число C кратно 37.

Решения заданий модуля 7

Задача 1.

На собеседование пришли 65 школьников. Им предложили 3 контрольные работы. За каждую контрольную ставилась одна из оценок: 2, 3, 4 или 5. Верно ли, что найдутся два школьника, получившие одинаковые оценки на контрольных?

Решение.

Рассмотрим множество наборов из трёх оценок за соответствующие контрольные. Количество таких наборов равно 4^3 или 64 (4 возможности за каждую из трёх контрольных). Поскольку число учащихся больше 64, по принципу Дирихле каким-то двум учащимся отвечает один набор оценок.

Задача 2.

Комиссия из 60 человек провела 40 заседаний, причём на каждом заседании присутствовало ровно 10 членов комиссии. Докажите, что какие-то два члена комиссии встречались на её заседаниях по крайней мере дважды.

Решение. Один из вариантов решения.

Мы можем выделить 6 групп: 60/10=6, которые не встречались на заседаниях, но было 40 заседаний, поэтому для каждой группы более 6 посещений. Следовательно, найдутся два члена комиссии, которые встречались, по крайней мере, дважды.

Задача 3.

В школе пять седьмых классов. В каждом из них учится по 32 человека. Докажите, что найдутся 14 человек, родившихся в один месяц.

Решение.

Предположим противное, что в каждом месяце родилось не более 13 учеников. Значит за 12 месяцев родилось не более 13•12=156 школьников. А по условию 5•32=160 учащихся в седьмых классах. Противоречие. Значит, найдется месяц, в котором родилось больше чем 13 учеников, т.е. хотя бы 14.

Решение заданий модуля 8

Задача 1.

Каким образом можно принести из реки ровно 6 л воды, если имеются только два ведра: одно – емкостью 4 л, другое – 9 л?

Решение.

9л	9	5	5	1	1	0	9	1	6
4л	0	4	0	4	0	1	1	5	4

Задача 2.

В ящике 25 кг гвоздей. Как с помощью чашечных весов и одной гири в 1 кг за два взвешивания отмерить 19 кг гвоздей?

Решение.

При первом взвешивании в одну из чашек весов кладем гирю и все гвозди раскладываем по чашкам так, чтобы установилось равновесие. Получим 12 и 13 кг гвоздей. Вторую кучку откладываем, а первую делим пополам, взвешивая без гири. Получили искомое количество гвоздей, соединив вторую кучку и кучку, полученную при втором взвешивании, т.е. 13+6 =19.

Задача 3.

Арбуз уравновешивает дыню и свеклу. Дыня уравновешивает капусту и свеклу. 2 арбуза весят столько же, сколько 3 кочана капусты. Во сколько раз дыня тяжелее свеклы?

Решение.

Арбуз=дыня+свекла; дыня=капуста+свекла; следовательно, арбуз=капуста+2свеклы, а 2 арбуза=2 капусты+4 свеклы. Но 2 арбуза=3 капусты, следовательно, 3 капусты=2капусты+4 свеклы, а 1 капуста=4 свеклы. Таким образом, дыня=5 свеклам.

Решения заданий модуля 9

Задача 1.

В чашке, стакане, кувшине и банке находятся молоко, лимонад, квас и вода. Известно, что вода и молоко не в чашке; сосуд с лимонадом стоит между кувшином и сосудом с квасом; в банке не лимонад и не вода; стакан стоит около банки и сосуда с молоком. В какой сосуд налита каждая из жидкостей?

Решение.

В банке может быть только квас, ибо из условия следует, что там не лимонад, не вода и не молоко. В чашке – лимонад, так как известно, что там не молоко, не вода и не квас. Поскольку в стакане не молоко, не квас, не лимонад – значит, вода, а в кувшине – то, что осталось, т.е. молоко.

Ответ: В чашке – лимонад, в стакане – вода, в кувшине – молоко, в банке – квас.

Задача 2.

В очереди за билетами в кино стоят друзья: Юра, Миша, Володя, Саша и Олег. Известно, что Юра купит билет раньше, чем Миша,

но позже Олега; Володя и Олег не стоят рядом, а Саша не находится рядом ни с Олегом, ни с Юрой, ни с Володей. Кто за кем стоит?

Решение.

Поскольку Юра купит билет раньше, чем Миша, но позже Олега; и Володя и Олег не стоят рядом, а Саша не находится рядом ни с Олегом, ни с Юрой, ни с Володей, то значит, что Юра и Миша первыми быть не могут. Поэтому Олег первый. Саша может стоять рядом с Мишей, но Миша стоит после Юры, поэтому Саша стоит пятым, а Миша стоит четвертым. Володя и Олег не стоят рядом, но Юра купит билет раньше, чем Миша, но позже Олега, следовательно, Володя третий, а Юра второй.

Если результаты рассуждений занести в таблицу, то получим следующее:

	Юра	Миша	Володя	Саша	Олег
1	-	-	-	-	+
2	+	-	-	-	-
3	-	-	+	-	-
4	-	+	-	-	-
5	-	-	-	+	-

Ответ: Олег первый Юра второй, Володя третий, Миша четвертый, Саша пятый.

Задача 3.

Пятеро школьников из пяти различных городов приехали в Липецк для участия в областной математической олимпиаде. На вопрос «Откуда вы, ребята?» они ответили: Андреев: «Я приехал из Грязей, а Григорьев живет в Данкове», Борисов: «В Данкове живет Васильев, я прибыл из Задонска», Васильев: «Из Грязей приехал я, а Борисов – из Чаплыгина», Григорьев: «Я прибыл из Данкова, а Данилов – из Усмани», Данилов: «Да, я действительно из Усмани, Андреев живет в Задонске».

Когда удивились противоречивости их ответов, ребята объяснили: «Каждый высказал одно утверждение правильное, а другое –

ложное. Но по нашим ответам вполне можно установить, откуда мы приехали». Откуда приехал каждый из школьников?

Решение.

Предположим, что утверждение «Андрей жил в Грязях» - верно, это значит Григорьев жил не в Данкове, тогда утверждение Григорьева: «Я прибыл из Данкова» - ложно. Поэтому утверждение Григорьева «Данилов – из Усмани» - верно, из утверждения Данилова: «Да, я действительно из Усмани, Андреев живет в Задонске», делаем вывод, что Андреев не живет в Задонске. Так как, Андреев из Грязей, то из слов Васильева: «Из Грязей приехал я, а Борисов – из Чаплыгина» делаем вывод, что утверждение «Борисов – из Чаплыгина» - верно. А тогда верно утверждение Борисова: «В Данкове живет Васильев».

Заполним таблицу по методу исключения:

	Грязи	Данков	Усмань	Чаплыгин	Задонск
Андреев	+	-	-	-	-
Борисов	-	-	-	+	-
Васильев	-	+	-	-	-
Григорьев	-	-	-	-	+
Данилов	-	-	+	-	-

Ответ: Андреев из Грязей, Борисов из Чаплыгина, Васильев из Данкова, Григорьев из Задонска, Данилов из Усмани.

Решения заданий модуля 10

Задача 1.

Лучи OA и OB образуют прямой угол. Любознательный семиклассник Петя провел внутри этого угла лучи OC и OD, образующие угол 10°, а затем посчитал все острые углы между любыми парами нарисованных лучей (не только соседних). Оказалось, что сумма самого большого и самого маленького из найденных углов составляет 85°. Найдите величины трех углов, на которые прямой угол разбивается лучами OC и OD.

Решение.

Заметим, что наименьшим из этих трех углов является угол COD. Действительно, если бы наименьшим углом был один из крайних углов, то два других вместе составляли бы наибольший угол между лучами, и тогда сумма самого большого и самого маленького составила бы 90°. Обозначим самый большой угол (один из крайних) через x. Тогда самый большой угол между лучами равен x+10°, что дает равенство (x+10°)+10°=85°, откуда получаем x=65°, а третий угол составляет 15°.

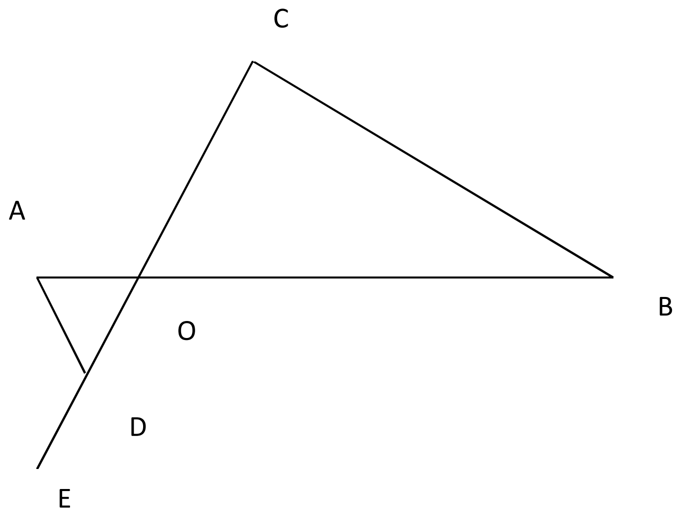
Ответ: 10°, 15°, 65°.

Задача 2.

На рисунке, выполненном с нарушением реальных размеров, величины углов A, C и ADE должны быть равны 22°, 60° и 117° соответственно. Найдите величину угла B.

Решение.

Углы ADE и ADO смежные, поэтому величина угла ADO составляет 63°. Тогда, поскольку сумма углов треугольника равна 180°, величина угла AOD составляет 95°. Углы AOD и COB равны как вертикальные. Тогда угол B равен 180°-60°-95°=25°.



Ответ: 25°.

Задача 3.

Точки E и F – соответственно середины сторон BC и CD квадрата ABCD. Отрезки AE и BF пересекаются в точке K. Что больше: площадь треугольника AKF или площадь четырехугольника KECF?

Решение.

Пусть 4S – площадь квадрата ABCD. Тогда площадь каждого из треугольников ABE, ADF, BCF равна S, поэтому площадь треугольника ABF равна 2S. Но ΔAKB – часть ΔABE, поэтому его площадь меньше S. А это означает, что площадь ΔAKF больше S, т.к. его площадь в сумме с площадью ΔAKB составляет 2S. С другой стороны, площадь четырехугольника KECF меньше S, т.к. он составляет часть ΔBCF.

Ответ: площадь треугольника больше.

Решения заданий модуля 11

Задача 1. ***Игра дат***.

Первый игрок сообщает какую-нибудь дату января. Каждый игрок на своём ходе называет более позднюю дату, увеличивая каждый раз или календарную дату в месяце, или порядковый номер месяца, но не то и другое одновременно. Первый, кто доберётся до 31 декабря, выигрывает. Определит выигрышную стратегию для начинающего.

Решение.

Выигрывает тот, кто первым назовет дату 31.12, поэтому все числа декабря с 1 по 30 проигрышные. 30 ноября – выигрышная дата, а остальные числа ноября – проигрышные. Аналогично, выигрышными будут даты 29.10, 28.09, 27.08, 26.07, 25.06, 24.05, 23.04, 22.03, 21.02, 20.01. начинающий должен назвать 20 января.

Задача 2. ***Поставь на ноль***.

Возьмём полоску клетчатой бумаги и занумеруем клетки числами 0, 1, 2, …, 14. На одной из 15-ти клеток стоит фишка. Двое игроков по очереди передвигают фишку влево на 1, 2, 3 или 4 клетки. Проигрывает тот, кому некуда ходить.

При каком начальном положении фишки выигрывает начинающий, а при каком его партнёр?

Решение.

Начальное положение фишки, при котором начинающий выигрывает, назовём выигрышным и соответствующие ему клетки отметим знаком «+». Остальные клетки для начинающего назовём проигрышными и отметим знаком «–». Расставлять плюсы и минусы начнём с нуля. В этой клетке ставится знак «–», так как если фишка стоит на нуле, начинающему некуда ходить.

В клетках 1, 2, 3 и 4 ставим «+», так как если фишка стоит на этих клетках начинающий выигрывает одним ходом, ставя фишку на ноль.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9+	10	11	12	13	14	15
–	+	+	+	+	–	+	+	+	+	–	+	+	+	+	–

Клетка 5. Если фишка стоит в этой клетке, то, как бы ни пошёл начинающий фишка после его хода окажется в клетках 1, 2, 3 или 4. Его партнёр пойдёт на ноль и выиграет. Значит клетка 5 проигрышная.

Клетки 6, 7, 8, 9 – выигрышные. Начинающий может передвинуть фишку в клетку 5 и тем самым поставить своего противника в проигрышное положение.

Точно так же клетка 10 – проигрышная, из неё начинающий может попасть в клетки 6, 7, 8, 9, выигрышные для противника.

Клетки 11, 12, 13 и 14 – выигрышные, а клетка 15 – проигрышная и так далее.

Ясно, что начинающий в любом случае выиграет, если каждый раз будет ставить фишку на клетку с номером, делящимся на 5. Он сможет это сделать, если вначале фишка стоит на клетке с номером не кратным 5. В противном случае этой стратегией может воспользоваться противник.

Задача 3.

Малыш и Карлсон по очереди достают из коробки конфеты, при этом каждый берет на одну конфету больше или меньше, чем перед этим взял другой, не брать конфеты из коробки в свою очередь нельзя. Вначале в коробке было 24 конфеты, и Малыш и Карлсон договорились, что если в какой-то момент в коробке останется ровно 4 или 14 конфет, то тому, чья очередь брать конфеты, достанется торт. Сможет ли Карлсон, который первым берет конфеты, выиграть торт, если вначале он имеет право взять 1 или 2 конфеты?

Решение.

Выигрышная стратегия: К-1⇒М-2, К-3⇒М-2 (если сейчас Малыш возьмет 4 конфеты, то их останется 14), К-1⇒М-2, К-1⇒М-2, К-1⇒М-2, К-1⇒М-2, и Карлсон выиграл, т.к. осталось 4 конфеты.

Ответ. Карлсон сможет выиграть.

Решения заданий модуля 12

Задача 1. Дробь $\frac{В \cdot А \cdot Р \cdot Е \cdot Н \cdot Ь \cdot Е}{К \cdot А \cdot Р \cdot Л \cdot С \cdot О \cdot Н}$ равна целому числу, разные буквы обозначают разные цифры, а между ними стоит знак умножения. Чему равна дробь? Ответ обоснуйте.

Решение.

В выражении использованы десять различных букв, что соответствует 10 различным цифрам. Так как на ноль делить нельзя, то 0 будет входить в числитель. Поэтому дробь равна 0.

Ответ: 0.

Задача 2.

В коробке имеются карандаши разного цвета, разной длины и разной толщины. Придумайте такой набор карандашей, чтобы у любых двух из них совпадал ровно один признак (цвет, длина или толщина).

Решение.

Закодируем карандаши буквами по цвету, длине и толщине. Тогда искомый набор может быть таким: АВА, ААВ, ВАА, ВВВ.

Задача 3.

Вася в течение суток тратит 1/3 часть своего времени на сон, 1/4 - на занятия в школе, 1/5 – на встречи с друзьями, 1/6 своего времени слушает музыку, 1/7 – играет на компьютере. Можно ли так жить, если каждым из перечисленных дел он занимается отдельно?

Решение.

Найдем сумму чисел 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7. Она равна 459/420, что больше 1. Поэтому так жить нельзя.

Задача 4.

Какой угол образуют стрелки часов в 12 часов 20 минут?

Решение.

В 12.00 стрелки часов сходятся вместе. После этого за 20 минут минутная стрелка проходит 1/3 окружности, т.е. описывает угол в 120°. Часовая стрелка движется в 12 раз медленнее (т.к. описывает круг за 12 часов). Поэтому она за 20 минут опишет угол в 120°:12=10° и будет образовывать с минутной стрелкой угол 120°-10°=110°.

Ответ: 110°.

Список литературы

1. Агаханов Н.Х. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993–2006: Окружной и финальный этапы. – М.:МЦНМО, 2007.
2. Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математические олимпиады Московской области. Изд. 2-е, испр. и доп. – М.: Физматкнига, 2006.
3. Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожевников П.А., Подлипский О.К., Терешин Д.А. Математика. Всероссийские олимпиады. Вып. 1. – М.: Просвещение, 2008
4. Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математика. Всероссийские олимпиады. Вып. 2. – М.: Просвещение, 2009.
5. Бабинская И.П. Задачи математических олимпиад. – М., 1975.
6. Гальперин Г.А., Толпыго А.К. Московские математические олимпиады. – М.: Просвещение, 1986
7. Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки. – Киров: Аса, 1994.
8. Горбачев Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике. – М.: МЦНМО, 2005.
9. Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. Как решают нестандартные задачи. – М.: МЦНМО, 2008.
10. Коннова Е.Г. Математика. Поступаем в вуз по результатам олимпиад. Ч. 1. / Под ред. Ф.Ф. Лысенко. – Ростов-на-Дону, М., 2010.
11. Петраков И.С. Математические олимпиады школьников. – М.: Просвещение, 1982.
12. Фарков А.В. Математические олимпиады. – М.: Экзамен, 2006.

Интернет-ресурсы:

http://www.problems.ru/

http://kvant.mccme.ru/ - журнал “Квант”.

http://math-on-line.com - Математика-он-лайн. Занимательная математика школьникам.

http://olympiads.mccme.ru/mmo/ - Московская математическая олимпиада.

http://school-collection.edu.ru – единая коллекция цифровых образовательных ресурсов (задачи Московских олимпиад классифицированные по темам).

http://www.metaschool.ru - Интернет-кружки, интернет-олимпиады, интернет-репетитор.

http://www.rusolymp.ru/ – портал Всероссийской олимпиады школьников.
http://www.school.mipt.ru/ - ЗФТШ МФТИ.
http://www.turgor.ru/ - Турнир Городов - международная математическая олимпиада для школьников.
http://www.zaba.ru/ - Математические олимпиады и олимпиадные задачи.